

ENTROPIES ET RIGIDITÉS DES ESPACES LOCALEMENT SYMÉTRIQUES DE COURBURE STRICTEMENT NÉGATIVE

G. BESSON, G. COURTOIS, S. GALLOT

1. Introduction

De nombreuses inégalités de la géométrie (quand elles sont optimales) sont équivalentes au calcul du minimum d'un invariant qui est alors vu comme une fonction de la géométrie. La caractérisation des cas d'égalité revient souvent à prouver que la géométrie pour laquelle cette fonction atteint son minimum est unique (à isométries près), il en découle alors un théorème de rigidité. Un exemple classique est donné par l'inégalité isopérimétrique : soit D un domaine borné de $\mathbf{R}^2$, à bord lisse, soient A son aire et L son périmètre (la longueur du bord ∂D), l'étude de l'invariant géométrique L^2/A mène alors à l'inégalité :

$$L^2/A \geq 4\pi .$$

La caractérisation des cas d'égalité est bien un théorème de rigidité : en effet, les boules sont les seuls domaines de $\mathbf{R}^2$ vérifiant $L^2/A = 4\pi$. Quand l'invariant considéré a un sens géométrique naturel, la fonction de la géométrie associée admet, parmi ses points critiques, les objets qui possèdent le plus de symétries. Il est donc tentant d'espérer, comme c'est le cas dans l'exemple ci-dessus, que cet invariant atteint son minimum pour ces objets "symétriques" et pour ceux-là seulement.

Ces trois aspects : établissement de l'inégalité optimale, caractérisation des cas d'égalité comme correspondant aux espaces symétriques, unicité (ou rigidité) de ces espaces symétriques, se retrouvent dans notre théorème principal. Un des corollaires importants de celui-ci est une nouvelle preuve, simple et unifiée, des théorèmes de rigidité à la Mostow dans le cas des espaces localement symétriques compacts de courbure strictement négative (de rang un). On remarquera que l'analogie avec l'inégalité isopérimétrique classique n'est pas uniquement formelle car celle-ci apparaît dans un des volets de ce travail (voir le chapitre 6 et la proposition 9.11).

Plus précisément, soit X une variété différentiable compacte connexe orientée de dimension n . À chaque métrique riemannienne g sur X , on associe le système dynamique dont l'espace des phases est son fibré unitaire $U_g X$ et dont le flot est son flot géodésique $\xi_g(t)$.

Dans cet article nous nous intéressons au minimum global d'une fonctionnelle faisant intervenir des invariants à la fois de la structure riemannienne et du flot géodésique. À cause de la nature double de ces invariants l'existence et l'unicité d'un minimum global aura des implications géométriques et dynamiques. Parmi les applications dynamiques possibles, nous nous intéressons en particulier au problème inverse : est-ce que la connaissance de la dynamique donne la géométrie? Plus précisément, si les deux flots sont équivalents, est-ce que les variétés riemanniennes sont isométriques?

Une première remarque évidente va dans le sens d'une réponse positive : le flot géodésique donne les longueurs des géodésiques périodiques. On définit ainsi le spectre marqué des longueurs comme l'application qui associe, à chaque classe d'homotopie libre de X , la longueur de la géodésique périodique qu'elle contient (lorsque g est à courbure négative) (voir [BuK]).

Pour aborder ces questions nous allons utiliser des informations dynamiques beaucoup plus faibles que la donnée du spectre marqué des longueurs. En fait nous travaillons sur des invariants asymptotiques. L'entropie topologique est l'invariant le plus naturel associé à la situation. Nous renvoyons à la littérature pour une définition de cet invariant dans le cas général d'une métrique de courbure quelconque. En courbure négative, l'entropie topologique se déduit de la connaissance de l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques, elles-mêmes données par la dynamique. Rappelons sa définition, dans ce cas,

$$h_{\text{top}}(g) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \text{Log} (\#\{\gamma / \ell_g(\gamma) \leq R\})$$

où γ désigne une géodésique périodique et $\ell_g(\gamma)$ sa longueur mesurée par la métrique g .

Un autre invariant de nature plus géométrique, l'entropie volumique, est le sujet principal de cet article. Nous rappelons sa définition : soit g une métrique sur X , elle définit une métrique périodique sur le revêtement universel $\tilde{X}$ de X , on pose alors :

$$\text{entropie volumique de } g = h(g) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \text{Log Vol}(B(x, R))$$

où $\text{Vol}(B(x, R))$ est le volume de la boule de centre x et de rayon R dans $\tilde{X}$. Il est aisé de vérifier que $h(g)$ ne dépend pas de x et que la limite existe. Le terme entropie est utilisé à cause de la relation entre cet invariant et l'entropie topologique du flot géodésique donnée par le résultat suivant :

THÉOREME (Dinaburg, Manning [M]). *Si $h_{\text{top}}(g)$ désigne l'entropie topologique du flot géodésique de (X, g) on a*

$$i) \quad h(g) \leq h_{\text{top}}(g)$$

ii) si la courbure de g est négative ou nulle $h(g) = h_{\text{top}}(g)$.

Si X admet une métrique riemannienne localement symétrique de rang 1, il a été prouvé qu'elle est un point critique pour la fonctionnelle h ([KKnWe]) restreinte à l'ensemble des métriques de volume fixé (il s'agit là d'une normalisation naturelle qui a l'effet d'un passage au quotient par les homothéties).

Par ailleurs dans ([BsCoG1]) nous montrons que, dans la classe conforme d'une telle métrique (que nous noterons g_0), g_0 est un minimum absolu de h (pour les métriques g telles que $\text{Vol}(g) = \text{Vol}(g_0)$). Un tel résultat pour h_{top} était prouvé antérieurement dans [K].

Il est tentant de conjecturer que, même sans se limiter à une classe conforme donnée, h admet un minimum absolu en g_0 . Il y a en fait trois problèmes dont l'essence consiste à caractériser les métriques localement symétriques par des propriétés géométriques ou dynamiques. Soit g_0 une métrique localement symétrique, de courbure strictement négative sur X :

P.1 PROBLÈME DU VOLUME MINIMAL. Soit g une métrique sur X , montrer que

$$\text{Ricci}(g) \geq -(n-1)g \implies \text{Vol}(g) \geq \text{Vol}(g_0)$$

où g_0 a été normalisée de sorte que $\text{Ricci}(g_0) = -(n-1)g_0$.

P.2 PROBLÈME DE L'ENTROPIE MINIMALE. Soit g une métrique sur X montrer que

$$\text{Vol}(g) = \text{Vol}(g_0) \implies h(g) \geq h(g_0).$$

P.3 PROBLÈMES DE RIGIDITÉ. 1) Soit g une métrique dont le flot géodésique est C^1 -conjugué (avec préservation du temps) à celui de g_0 , montrer que g et g_0 sont isométriques.

2) Soit g une métrique à courbure négative qui a même spectre marqué des longueurs que g_0 , montrer que g et g_0 sont isométriques.

Les problèmes P.1 et P.2 sont énoncés explicitement sous forme de conjectures (dans le cas hyperbolique réel) dans [Gr1] et [Gr2] (voir [Gr2], p. 58). Le second est en fait posé implicitement par A. Katok ([K]) dans le cas de l'entropie topologique. Le problème P.3 a été énoncé explicitement par A. Katok.

Remarquons que les réponses affirmatives aux problèmes P.1, P.2 et P.3 sont connues en dimension 2 : la solution de P.1 découle du théorème de Gauss-Bonnet, celle de P.2 est donnée dans [BsCoG1] (la question similaire, concernant l'entropie topologique, était résolue en dimension 2 par A. Katok ([K])), enfin le problème P.3 a été résolu indépendamment en dimension 2 par C. Croke et J.P. Otal ([Cr], [O]), leur résultat restant valable lorsque g_0 est une métrique non symétrique de courbure négative sur une surface.

En dimension supérieure à 2, dans [BsCoG1], nous donnons une preuve de P.1 dans un voisinage de la classe conforme de toute métrique localement symétrique de type non compact (et de rang quelconque) en prouvant qu'une telle métrique est un minimum local de la fonctionnelle qui, à chaque métrique riemannienne, associe la norme $L^{n/2}$ de sa courbure scalaire.

Dans [BsCoG2], nous donnons une preuve de P.2 et de P.3 pour une métrique g située dans un voisinage de la classe conforme d'une métrique hyperbolique g_0 , ce qui entraîne une autre preuve locale de P.1.

Dans le présent article, nous démontrons la conjecture de A. Katok et M. Gromov sur l'entropie minimale d'un espace localement symétrique de courbure strictement négative. Nous obtenons plus généralement le

THÉOREME PRINCIPAL. *Soient Y et X deux variétés compactes connexes orientées de même dimension n , reliées par une application continue*

$$f : Y \longrightarrow X$$

de degré non nul. Supposons X munie d'une métrique localement symétrique de courbure strictement négative, notée g_0 . Alors toute métrique g sur Y vérifie :

$$h^n(Y, g) \operatorname{Vol}(Y, g) \geq |\deg f| h^n(X, g_0) \operatorname{Vol}(X, g_0) .$$

De plus, en dimension $n \geq 3$, l'égalité est atteinte si et seulement si (Y, g) est localement symétrique (de même type que (X, g_0)) et s'il existe un revêtement homothétique, homotope à f , de (Y, g) sur (X, g_0) .

Ce théorème admet de nombreuses conséquences que nous classons en deux catégories : applications de nature riemannienne, applications de nature dynamique (voir le chapitre 9). En particulier, un corollaire immédiat est la résolution du problème P.1 dans le cas où g_0 est hyperbolique réel.

THÉOREME. *Soient Y et X deux variétés compactes connexes orientées de même dimension n , reliées par une application continue*

$$f : Y \longrightarrow X$$

de degré non nul. Supposons X munie d'une métrique hyperbolique réelle (c'est-à-dire à courbure constante égale à -1), notée g_0 . Alors toute métrique g sur Y vérifie :

$$\operatorname{Ricci}(g) \geq -(n-1)g \implies \operatorname{Vol}(Y, g) \geq |\deg f| \operatorname{Vol}(X, g_0) .$$

De plus, en dimension $n \geq 3$, l'égalité est atteinte si et seulement si (Y, g) est hyperbolique réelle et s'il existe un revêtement localement isométrique homotope à f .

Insistons sur le fait que nous obtenons ce corollaire dans le cas où g_0 est hyperbolique réel seulement. La preuve, en effet, repose sur le théorème

principal et l'inégalité de comparaison de R.L. Bishop qui n'est optimale que dans le cas de courbure constante. Le problème général, c'est-à-dire lorsque g_0 est localement symétrique de courbure non constante, est donc ouvert; il n'est d'ailleurs pas certain que, dans ce cadre général, la réponse soit positive.

Le cas d'égalité du théorème principal peut être vu comme un résultat de rigidité dont les théorèmes suivants sont des corollaires immédiats :

COROLLAIRE (G.D. Mostow). *Soient Y et X deux variétés compactes localement symétriques, de courbure strictement négative, homotopiquement équivalentes; alors elles sont isométriques, à un facteur homothétique près.*

COROLLAIRE (K. Corlette, Y.T. Siu, W. Thurston). *Soient Y et X deux variétés compactes localement symétriques, de courbure strictement négative, de même type (normalisées de sorte que le maximum de leurs courbures sectionnelles soit -1), reliées par une application continue $f : Y \longrightarrow X$, de degré non nul. Si $\text{Vol}(Y) = |\deg f| \text{Vol}(X)$, alors il existe un revêtement riemannien de Y sur X homotope à f .*

Nous donnons ainsi une preuve unique de l'ensemble des théorèmes de rigidité ci-dessus, et relativement simple puisqu'elle n'utilise que des arguments de géométrie riemannienne élémentaire : par exemple, nous ne retenons de la géométrie des espaces symétriques que la seconde forme fondamentale des horosphères dont le calcul peut être fait à l'aide de la détermination de certains champs de Jacobi (voir le chapitre 5).

Un corollaire surprenant du cas d'égalité du théorème précédent est un théorème de rigidité pour les métriques d'Einstein en dimension 4.

THÉORÈME. *Soit X une variété compacte de dimension 4 qui admet une métrique hyperbolique réelle g_0 ; alors, à homothéties près, celle-ci est la seule métrique d'Einstein sur X .*

Remarquons que, dans le cas du théorème de rigidité de Mostow cité ci-dessus, l'hypothèse localement symétrique (par exemple "courbure sectionnelle constante") impose *a priori* le revêtement universel riemannien de la variété, donc le modèle local de celle-ci (à isométries près). Le problème de la rigidité devient alors de nature essentiellement algébrique.

A contrario, l'hypothèse "Einstein" ne fixe pas le modèle local de la variété. Pour démontrer un résultat de rigidité sous cette hypothèse il faut donc au préalable, par des considérations de nature globale, arriver à éliminer les autres modèles locaux possibles.

En utilisant de nouveaux invariants de dimension 4 introduits par N. Seiberg et E. Witten, C. LeBrun ([Le]) prouve le résultat suivant :

THÉORÈME (C. LeBrun). *Soit X une variété compacte de dimension 4 qui admet une métrique hyperbolique complexe g_0 ; alors, à homothéties près, celle-ci est la seule métrique d'Einstein sur X .*

Le théorème principal fait intervenir l'entropie volumique associée aux métriques en présence, mais, en utilisant le théorème de Dinaburg et Manning, nous pouvons énoncer le même résultat avec l'entropie topologique des flots géodésiques associés respectivement à g et à g_0 . Or l'entropie topologique est un invariant de C^0 -conjugaison. Nous obtenons alors le

THÉORÈME. *Soit (X, g_0) une variété compacte localement symétrique de courbure strictement négative. Toute variété dont le flot géodésique est C^1 -conjugué à celui de (X, g_0) est isométrique à (X, g_0) .*

Ce théorème découle donc du cas d'égalité dans le théorème principal et des remarques précédentes. Un des points cruciaux consiste à montrer que, si les deux variétés ont leurs flots géodésiques conjugués, elles ont même volume, c'est pour ce point que l'hypothèse de C^1 -conjugaison est importante; toutefois, si g_0 est hyperbolique réelle et si l'autre variété est de courbure strictement négative, la C^0 -conjugaison suffit grâce à un résultat de U. Hamenstädt ([H2]).

De ce théorème se déduisent trois résultats de rigidité faisant intervenir le flot géodésique. Si (X, g) est une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative, son flot géodésique est d'Anosov et la décomposition correspondante donne lieu à quatre feuilletages : stable, central stable, instable et central instable. Dans [BenFoL], Y. Benoist, P. Foulon et F. Labourie montrent que, si cette décomposition est C^∞ , le flot est C^∞ -conjugué au flot géodésique d'une variété localement symétrique de courbure strictement négative. Alors le théorème principal donne le

COROLLAIRE. *Soit (X, g) une variété compacte de dimension ≥ 3 et de courbure strictement négative dont la décomposition d'Anosov est C^∞ , alors g est localement symétrique (de courbure strictement négative).*

Une variété simplement connexe est dite harmonique lorsque toutes ses sphères géodésiques sont de courbure moyenne constante. Une conjecture de A. Lichnerowicz pose la question de savoir si une telle variété est toujours un espace symétrique de rang 1. En courbure positive, cette question est résolue positivement par Z. Szabo ([Sz]). En courbure négative, il existe des contre-exemples dus à E. Damek et F. Ricci ([DRi]) mais ceux-ci n'admettent pas de quotients compacts. Le théorème suivant résout la conjecture de A. Lichnerowicz dans le cas d'une variété harmonique de courbure négative qui admet un quotient compact. Ce résultat se généralise au cas asymptotiquement harmonique, c'est-à-dire au cas où seules les horosphères sont

supposées de courbure moyenne constante; en effet, dans ce cas, P. Foulon et F. Labourie ([FoL]) prouvent que le flot géodésique de (X, g) est C^∞ -conjugué à celui d'un espace localement symétrique de rang 1. Nous obtenons donc le

COROLLAIRE. *Soit (X, g) une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative dont le revêtement universel est asymptotiquement harmonique, alors celui-ci est un espace symétrique.*

Sur le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne compacte de courbure négative sont définies plusieurs mesures canoniquement associées à la métrique riemannienne. Parmi elles, considérons la mesure de Bowen-Margulis et la mesure harmonique. Pour une définition de ces mesures, voir par exemple [Led1]. Le corollaire suivant nous a été suggéré par F. Ledrappier.

THÉORÈME. *Soit (X, g) une variété riemannienne compacte orientable telle que la mesure de Bowen-Margulis et la mesure harmonique associées à g sont proportionnelles, alors (X, g) est localement symétrique.*

Comme ingrédient essentiel du théorème principal, nous construisons un invariant associé à une représentation ρ du groupe fondamental Γ de X dans $G = \text{Isom}(\tilde{X}, g_0)$, le groupe des isométries de l'espace localement symétrique $(\tilde{X}, g_0)$.

Bien que cet argument ne soit pas utilisé dans la preuve, il peut être instructif de remarquer que, en vertu du théorème de rigidité de G.D. Mostow, une telle représentation ρ est unique (à conjugaison près) et que notre invariant ne dépend que de X et de sa structure localement symétrique et pas de la représentation ρ choisie, ($n = \dim X \geq 3$). En fait, même en dimension 2, cet invariant se trouve ne pas dépendre de la représentation ρ choisie (voir le chapitre 6).

Nous appelons cet invariant le volume sphérique de X et nous le notons "Sphere Vol(X)".

L'inégalité du théorème principal repose alors (par exemple lorsque $Y = X$) sur les deux relations suivantes : pour toute métrique riemannienne g sur X ,

$$\text{Sphere Vol}(X) \leq \left(\frac{h(g)^2}{4n} \right)^{n/2} \text{Vol}(X, g) , \quad (1.1)$$

$$\text{Sphere Vol}(X) = \left(\frac{h(g_0)^2}{4n} \right)^{n/2} \text{Vol}(X, g_0) . \quad (1.2)$$

Afin de définir Sphere Vol(X), la construction de base consiste à considérer la famille des applications de $\tilde{X}$ dans la sphère unité de l'espace de

Hilbert $L^2(\partial\tilde{X})$ (où $\partial\tilde{X}$ est le bord géométrique de $\tilde{X}$ pour la métrique g_0) qui sont équivariantes pour la représentation ρ de Γ dans G et une représentation naturelle de Γ dans $L^2(\partial\tilde{X})$. Le volume sphérique est l'infimum, pour ces applications Φ , du volume dans $L^2(\partial\tilde{X})$ de $\Phi(U)$, où $U \subset \tilde{X}$ est un domaine fondamental de X .

L'inégalité (1.1) consiste à associer à chaque métrique g sur X une famille d'applications Φ_c liées à l'entropie de g (la définition exacte des applications Φ_c est donnée en 2.3.b) et à vérifier que l'infimum en c des volumes de $\Phi_c(U)$ dans $L^2(\partial\tilde{X})$ est majoré par $(\frac{h(g)^2}{4n})^{n/2} \text{Vol}(X, g)$.

En fait, le volume sphérique peut être défini pour une variété quelconque, et l'inégalité (1.1) reste valable dans ce cadre très général (voir [BsCoG1]). En revanche, l'égalité (1.2) exige la présence sur X d'une métrique localement symétrique. L'égalité (1.2) consiste à montrer que le volume sphérique de X est réalisé par une application Φ_0 particulière, donnée par le noyau de Poisson de (X, g_0) . Pour cela, nous utilisons la méthode de calibration, c'est-à-dire que nous construisons une n -forme différentielle fermée sur $L^2(\partial\tilde{X})$ qui atteint son maximum sur tout n -repère orthonormé direct tangent à l'image de Φ_0 ; celle-ci s'obtient à l'aide d'une notion de barycentre pour toute mesure portée par $\partial\tilde{X}$ et de la forme volume de $(\tilde{X}, \tilde{g}_0)$.

L'inégalité principale apparaît donc comme liée à un problème de "sous-variété" minimisante, le barycentre réalisant une sorte de projection de toute autre sous-variété sur cette sous-variété minimisante qui diminue la forme-volume. En dimension deux, nous utilisons une structure kählérienne naturelle sur la sphère unité de $L^2(\partial\tilde{X})$ et montrons que l'image de Φ_0 est une sous-variété complexe, en sorte que cette dernière est calibrée naturellement par la forme de Kähler. Dans ce cas également l'inégalité isopérimétrique classique de $\mathbf{R}^2$ joue le rôle central.

Le barycentre fournit une application π de $L^2(\partial\tilde{X})$ sur $\tilde{X}$ telle que $\pi \circ \Phi_0 = \text{id}$. Dans les cas d'égalité du théorème principal et de ses corollaires, nous prouvons que la famille des applications Φ_c évoquées ci-dessus est telle que $\pi \circ \Phi_c$ converge (quand c tend vers l'entropie de g) et que sa limite soit une isométrie de (X, g) sur (X, g_0) .

Travaillant avec des formes différentielles, une modification de la construction de base permet d'obtenir, avec la même technique, le cas où Y et X sont deux variétés compactes distinctes reliées par une application de degré non nul. Le cas d'égalité s'obtient par la même méthode.

Dans les chapitres 2 et 3, nous donnons la construction de base et définissons les invariants utilisés. Après un bref rappel de la méthode de calibration au chapitre 4, nous prouvons l'inégalité centrale en 5. Le chapitre 6 concerne le cas de la dimension 2. En 7, nous étudions le cas d'égalité et

en 8 le cas de deux variétés distinctes. Les applications sont décrites au chapitre 9.

Nous remercions M. Gromov pour l'accueil enthousiaste qu'il a réservé à notre travail dès le début. Nous sommes également reconnaissants à M. Berger et A. Katok de l'intérêt qu'ils lui ont accordé. Par ailleurs les travaux de M. Gromov et A. Katok sont à la base de notre intérêt pour ce sujet.

Nous remercions aussi J. Lannes, F. Ledrappier, A. Marin et B. Sévennec pour des conversations fructueuses, ainsi que F. Labourie pour la pertinence des remarques qu'il a faites sur notre texte.

Ce travail a été partiellement soutenu par le contrat européen GADGET II, n° 9212RO.

2. Immersions équivariantes

Toutes les variétés considérées seront supposées compactes et orientées.

On se propose dans ce chapitre de décrire la construction fondamentale permettant de prouver le théorème principal. L'idée de base est de réaliser $\tilde{X}$, le revêtement universel de la variété X , comme sous-variété d'un espace de Hilbert par une immersion "aussi isométrique que possible". Cette construction apparaît déjà dans [BsCoG1].

On rappelle que X est une variété différentiable compacte connexe et orientée et $\tilde{X}$ est son revêtement universel, le groupe fondamental étant noté Γ .

On suppose X munie d'une métrique localement symétrique de courbure strictement négative, notée g_0 . En relevant g_0 , nous munissons $\tilde{X}$ d'une métrique symétrique qui nous servira de métrique de référence et que nous conviendrons de noter encore g_0 . En choisissant une origine dans $\tilde{X}$ on peut alors l'identifier (comme variété différentiable) à la boule unité $B(0, 1)$ de $\mathbf{R}^n$. De même le bord géométrique $\partial\tilde{X}$ (voir [BaGrS]) s'identifie naturellement à S^{n-1} . L'origine de $\tilde{X}$ sera notée o .

Le groupe Γ agit sur $\tilde{X}$ par transformations de revêtement. Soit $d\theta$ la mesure de probabilité canonique de $\partial\tilde{X} = S^{n-1}$, nous allons vérifier que Γ agit également isométriquement dans l'espace $L^2(\partial\tilde{X}, d\theta)$ des fonctions réelles de carré intégrable.

Rappelons d'abord quelques définitions (voir [BaGrS]) :

a) Soit θ un point à l'infini de $\tilde{X}$ (c'est-à-dire sur $\partial\tilde{X}$) et $c(t)$ la demi-géodésique infinie joignant o à θ , on définit la fonction de Buseman B_θ de centre θ par,

$$B_\theta(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [d_0(x, c(t)) - t]$$

où d_0 est la distance associée à g_0 sur $\tilde{X}$.

Avec cette convention, pour tout θ' de $\partial\tilde{X}$ différent de θ ,

$$\lim_{x \rightarrow \theta'} B_\theta(x) = +\infty \quad \text{et} \quad B_\theta(o) = 0.$$

b) Le noyau de Poisson associé à la métrique symétrique de courbure strictement négative de $\tilde{X}$ est la fonction,

$$p_0(x, \theta) = \exp(-h_0 B_\theta(x))$$

où h_0 est l'entropie de la métrique g_0 . Le revêtement universel $\tilde{X}$, muni de la métrique relevée g_0 , est donc un espace hyperbolique réel, complexe, quaternionnien ou un plan hyperbolique de Cayley. Si d désigne la dimension du corps ou de l'algèbre de base comme espace vectoriel réel, l'entropie de g_0 s'exprime en fonction de d et de la dimension n de X (comme variété réelle). Plus précisément, si la courbure sectionnelle de g_0 , notée $K(g_0)$, est normalisée pour satisfaire

$$\begin{aligned} K(g_0) &\equiv -1 \text{ dans le cas hyperbolique réel,} \\ -4 &\leq K(g_0) \leq -1 \text{ dans les autres cas.} \end{aligned}$$

on a

$$h(g_0) = h_0 = (n-d) + 2(d-1) = n + d - 2.$$

Il faut noter que si $n = d$, c'est-à-dire si $\tilde{X}$ est la droite complexe, quaternionnienne ou de Cayley, l'espace est un espace hyperbolique réel de courbure constante égale à -4; de plus, si $d = 8$, n doit être égal à 16, l'espace hyperbolique de Cayley n'existant qu'en dimension réelle 16.

Le noyau de Poisson est ici normalisé en sorte que

$$p_0(o, \theta) = 1 \quad \text{pour tout } \theta.$$

Rappelons que la fonction p_0 est harmonique par rapport à la variable x et que la mesure de probabilité $p_0(x, \theta)d\theta$ converge vaguement vers la masse de Dirac δ_{θ_0} lorsque x tend vers un point θ_0 de $\partial\tilde{X}$, le long d'une géodésique.

Soit G le groupe des isométries de $\tilde{X}$, les éléments de G agissent sur $\partial\tilde{X}$. On a alors la proposition standard suivante :

2.1. PROPOSITION. *Le jacobien de $g \in G$ agissant sur $\partial\tilde{X}$ vérifie*

$$\text{Jac}(g)(\theta) = p_0(g^{-1}(o), \theta).$$

De la proposition précédente, en posant $x = g(o)$, on déduit la relation,

$$p_0(\gamma x, \theta) = p_0(x, \gamma^{-1}(\theta)) p_0(\gamma(o), \theta).$$

L'action de Γ sur $L^2(\partial\tilde{X}, d\theta)$, l'espace des fonctions réelles de carré intégrable, peut donc être définie par :

$$\gamma(f)(\theta) = f(\gamma^{-1}(\theta)) \sqrt{p_0(\gamma(o), \theta)}.$$

Cela revient à considérer l'action de γ sur la mesure $f^2(\theta)d\theta$. La fonction f est donc pensée comme une demi-densité.

2.2. LEMME. *Ainsi définie, l'action de Γ sur $L^2(\partial\tilde{X}, d\theta)$ est isométrique.*

Preuve :

$$\begin{aligned}\int (\gamma(f))^2(\theta)d\theta &= \int f^2(\gamma^{-1}(\theta))p_0(\gamma(o), \theta)d\theta \\ &= \int f^2(\gamma^{-1}(\theta)) \text{Jac}(\gamma^{-1})(\theta)d\theta = \int f^2(\theta)d\theta . \quad \square\end{aligned}$$

Dans l'espace $L^2(\partial\tilde{X}, d\theta)$ nous noterons S^∞ la sphère unité. Nous allons considérer des applications lipschitziennes de $\tilde{X}$ dans l'intersection du cône des fonctions positives avec S^∞ :

$$\Phi : \tilde{X} \longrightarrow S^\infty \subset L^2(\partial\tilde{X}, d\theta)$$

qui sont Γ -équivariantes, c'est-à-dire qui vérifient :

$$\Phi(\gamma(x)) = \gamma(\Phi(x)) , \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma .$$

De telles applications peuvent être considérées comme des fonctions des deux variables (x, θ) que nous noterons encore Φ . Les trois conditions se traduisent alors par

- i) $\int_{\partial\tilde{X}} \Phi^2(x, \theta)d\theta = 1$
- ii) $\Phi(\gamma x, \theta) = \Phi(x, \gamma^{-1}(\theta))\sqrt{p_0(\gamma(o), \theta)}$.
- iii) $\Phi(x, \theta) > 0$.

2.3 Quelques exemples. a) $\Phi_0 = \sqrt{p_0}$ est un exemple d'une telle application. Il est aisé de vérifier que Φ vérifie (i), (ii) et (iii) (cf. 2.1) (rappelons que $d\theta$ est normalisée pour être une mesure de probabilité). De la définition de l'action de G dans S^∞ on déduit que l'image de l'application Φ_0 est l'orbite de la fonction constante égale à 1 sous cette action.

b) Soit g une autre métrique sur X . Nous noterons également g sa relevée à $\tilde{X}$, d la distance associée sur $\tilde{X}$ et dv_g la forme volume correspondante.

Nous considérons les fonctions

$$\Psi_c(x, \theta) = \left(\int_{\tilde{X}} e^{-cd(x, y)} p_0(y, \theta) dv_g(y) \right)^{1/2} \text{ et } \Phi_c(x, \theta) = \frac{\Psi_c(x, \theta)}{(\int_{\partial\tilde{X}} \Psi_c^2(x, \theta) d\theta)^{1/2}}$$

où c est un nombre réel vérifiant

$$c > h(g) = \text{entropie de } g ,$$

ce qui assure que $\Psi_c(x, \cdot)$ et $\Phi_c(x, \cdot)$ sont définies en tant qu'élément de $L^2(\partial\tilde{X})$.

Plus précisément, on a le

2.4. LEMME. *L'application $x \mapsto \Phi_c(x, \cdot)$ est équivariante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $(\tilde{X}, g)$ dans l'espace de Hilbert $L^2(\partial\tilde{X})$.*

Preuve : L'équivariance de Ψ_c découle de l'invariance de d et de dv_g par Γ . L'équivariance de Φ_c découle de celle de Ψ_c et de la Γ -invariance de l'application $x \mapsto \int_{\partial\tilde{X}} \Psi_c^2(x, \theta) d\theta$.

Toutes les fonctions considérées sont positives, on peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\tilde{X}} \Psi_c^2(x, \theta) d\theta &= \int_{\partial\tilde{X}} \int_{\tilde{X}} e^{-cd(x,y)} p_0(y, \theta) dv_g(y) d\theta \\ &= \int_{\tilde{X}} e^{-cd(x,y)} \left(\int_{\partial\tilde{X}} p_0(y, \theta) d\theta \right) dv_g(y) \\ &= \int_{\tilde{X}} e^{-cd(x,y)} dv_g(y) < +\infty \end{aligned}$$

car $c > h(g)$.

Pour prouver que Φ_c est de classe $\mathcal{C}^1$ comme application équivariante de $\tilde{X}$ dans $L^2(\partial\tilde{X}, d\theta)$ il suffit de montrer que Ψ_c est de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans $L^2(\partial\tilde{X}, d\theta)$. Remarquons que, pour y fixé, la fonction $x \mapsto e^{-cd(x,y)}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ mais est continûment différentiable en x au point x_0 si y n'appartient pas au lieu de coupure $\text{Cut}(x_0)$ de x_0 . L'ensemble $\text{Cut}(x_0)$ est de dv_g -mesure nulle.

Soient u un vecteur tangent à $\tilde{X}$ en x_0 et x_t une géodésique partant de x_0 et tangente à u en x_0 , en appliquant le théorème de convergence dominée pour des applications à valeurs dans un espace de Banach (voir [Sc], p. 8) à la fonction $\frac{1}{t}(\Psi_c(x_t, \cdot) - \Psi_c(x_0, \cdot))$ on montre que cette fonction converge, dans $L^2(\partial\tilde{X})$, vers $(u \cdot \Psi_c)(x_0, \cdot)$, où :

$$(u \cdot \Psi_c)(x, \theta) = \frac{1}{2\Psi_c(x, \theta)} \left(-c \int_{\tilde{X}} e^{-cd(x,y)} (u \cdot d)(x, y) p_0(y, \theta) dv_g(y) \right).$$

La domination de l'intégrant repose sur les inégalités

$$(2 - e^{cd(x',x)})e^{-cd(x,y)} \leq e^{-cd(x',y)} \leq e^{cd(x',x)}e^{-cd(x,y)}$$

pour tout x, x' et y dans $\tilde{X}$.

Par application du même théorème et en utilisant l'inégalité $|u \cdot d| \leq \sqrt{g(u, u)}$ on montre que la dérivée directionnelle $u \cdot \Psi_c(x, \cdot)$ dépend continûment de (x, u) (comme fonction à valeurs dans $L^2(\partial\tilde{X}, d\theta)$).

Remarquons que nous avons l'inégalité

$$|u \cdot \Psi_c(x, \theta)| \leq \frac{c}{2} \sqrt{g(u, u)} \Psi_c(x, \theta).$$

□

Le second exemple que nous obtenons par cette construction est alors $\Phi_c(x, \theta)$.

On vérifie alors, en utilisant le théorème de Pythagore comme à la page 430 de [BsCoG1],

$$\int_{\partial \tilde{X}} |u \cdot \Phi_c(x, \theta)|^2 d\theta \leq \frac{c^2}{4} g(u, u) .$$

2.5 Métriques images réciproques. Lorsque l'application équivariante Φ est une immersion, on peut définir sur $\tilde{X}$ la métrique image réciproque,

$$g_\Phi = \Phi^*(\text{can})$$

où can est la métrique canonique de S^∞ (restriction à S^∞ du produit scalaire hilbertien de L^2).

De l'équivariance, on déduit immédiatement que g_Φ passe au quotient sur X , nous noterons cette métrique encore g_Φ .

La formule de définition d'une métrique image réciproque est :

$$g_\Phi(u, u)_x = \int_{\partial \tilde{X}} |u \cdot \Phi(x, \theta)|^2 d\theta$$

c'est-à-dire la norme L^2 en θ de la différentielle de Φ en x dans la direction de u .

Lorsque Φ n'est que lipschitzienne, cette formule a un sens pour presque tout x et $g_\Phi(x)$ est alors une forme quadratique positive ou nulle, bornée en norme L^∞ .

Par la suite nous ne considérerons que des applications Φ satisfaisant cette condition. Nous parlerons de la *métrique* g_Φ par *abus de langage*.

2.6 Retour aux exemples. a) Si $\Phi_0 = \sqrt{p_0}$, c'est-à-dire

$$\Phi(x, \theta) = \exp\left(-\frac{h_0}{2} B_\theta(x)\right)$$

alors

$$u \cdot \Phi(x, \theta) = -\frac{h_0}{2} (u \cdot B_\theta(x)) \sqrt{p_0(x, \theta)} .$$

De la définition de B_θ , il découle que $-\nabla B_\theta$ est le vecteur unitaire tangent à $\tilde{X}$ en x déterminé par le point à l'infini θ (c'est le vecteur tangent en x à la géodésique joignant x à θ); posons $g_0(u, v) = (u, v)$, nous obtenons

$$g_{\sqrt{p_0}}(u, u)_x = \frac{h_0^2}{4} \int_{\partial \tilde{X}} (u, \nabla B_\theta)^2 p_0(x, \theta) d\theta .$$

Il est bien connu que l'application $\theta \mapsto -\nabla B_\theta$ réalise un difféomorphisme entre la sphère à l'infini et la sphère unité de $T_x \tilde{X}$, dont le jacobien est précisément p_0 , d'où

$$\int_{\partial \tilde{X}} (u, \nabla B_\theta)^2 p_0(x, \theta) d\theta = \int_{U_x \tilde{X}} (u, v)^2 d\sigma_x(v)$$

$U_x \tilde{X}$ désignant la sphère unité en x et $d\sigma_x$ sa mesure canonique.

On a donc

$$\int_{U_x \tilde{X}} (u, v)^2 d\sigma_x(v) = \frac{1}{n} g_0(u, u)$$

d'où

$$g_{\sqrt{p_0}} = \frac{h_0^2}{4n} g_0.$$

L'application Φ_0 est donc une immersion homothétique. On vérifie aussi aisément qu'elle est un plongement. Le calcul précédent aurait pu également se déduire du fait que l'image de Φ_0 est une orbite de l'action de G . Nous appellerons Φ_0 "plongement par le noyau de Poisson".

b) Des calculs faits en 2.3 b et 2.4, on déduit

$$g_{\Phi_c} \leq \frac{c^2}{4} g.$$

L'application Φ_c de l'exemple 2.3 b (voir aussi 2.4) décroît (à la constante $c^2/4$ près) la métrique.

2.7 Remarque : Dans [BsCoG1] nous utilisons des immersions (ou applications) équivariantes de $\tilde{X}$ dans la sphère unitaire $S^\infty \subset L^2(\tilde{X}, dv_{g_0})$ pour la mesure associée à la métrique g_0 sur $\tilde{X}$, invariante par l'action de Γ . Si Φ est une telle application, elle peut être considérée comme une fonction de deux variables sur $\tilde{X}$ satisfaisant :

- i) $\Phi(x, y) = \Phi(\gamma x, \gamma y), \quad \forall \gamma \in \Gamma$
- ii) $\int_{\tilde{X}} \Phi^2(x, y) dv_{g_0}(y) = 1.$
- iii) $\Phi > 0.$

Sous des hypothèses analogues aux précédentes nous pouvions définir la "métrique" g_Φ .

Considérons alors l'opération suivante : soit $k_0(t, x, y)$, le noyau de la chaleur sur $\tilde{X}$, et

$$\Phi_t(x, y) = \left(\int_{\tilde{X}} \Phi^2(x, z) k_0(t, z, y) dv_{g_0}(z) \right)^{1/2}$$

Φ_t est encore une application équivariante de $\tilde{X}$ dans S^∞ . On vérifie, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que la famille de métriques g_{Φ_t} est décroissante, c'est-à-dire que

$$\forall u \in T_x \tilde{X} \quad g_{\Phi_t}(u, u) \leq g_{\Phi_{t'}}(u, u) \quad \text{si } t \geq t'.$$

Par ailleurs la famille $\Phi_t^2(x, y) dv_{g_0}(y)$ de mesures de probabilité sur $\tilde{X}$ converge, lorsque t croît, vers la mesure (portée par le bord $\partial \tilde{X}$) $\Phi_\infty^2(x, \theta) d\theta$, où

$$\Phi_\infty(x, \theta) = \left(\int_{\tilde{X}} \Phi^2(x, z) p_0(z, \theta) dv_{g_0}(z) \right)^{1/2},$$

qui est donc du type précédent.

On pourrait alors montrer que g_{Φ_∞} est la limite des g_{Φ_i} . Pour éviter les détails techniques qui en résulteraient, il est préférable d'utiliser directement des applications à valeurs dans $S^\infty \subset L^2(\partial\tilde{X}, d\theta)$.

3. Le volume sphérique

Nous nous intéressons maintenant au sous-ensemble du cône des métriques riemanniennes (éventuellement dégénérées) constitué des tenseurs du type g_Φ .

Si g est une métrique quelconque sur X , désignons par g également sa relevée sur $\tilde{X}$, on peut comparer g_Φ à g en prenant la trace de g_Φ par rapport à g , soit $\text{Trace}_g(g_\Phi)(x)$. C'est une fonction sur $\tilde{X}$, invariante par Γ , que nous considérerons comme une fonction sur X .

Soit $\mathcal{N} = \{\Phi \setminus \Phi \text{ satisfaisant les conditions } i), ii) \text{ et } iii) \text{ de } 2.2\}$.

3.1. DÉFINITION. Nous définissons les nombres

$$T_p(g, \Phi) = \int_X [\text{Trace}_g(g_\Phi)(x)]^{p/2} dv_g(x),$$

$$T_p(g) = \inf\{T_p(g, \Phi) \setminus \Phi \in \mathcal{N}\},$$

$$\text{Sphere Vol}(X) = \inf \left\{ \int_X \sqrt{\det_g(g_\Phi(x))} \cdot dv_g(x) \setminus \Phi \in \mathcal{N} \right\}.$$

où $\det_g g_\Phi = \det[g_\Phi(e_i, e_j)]$, pour n'importe quelle base g -orthonormée $\{e_i\}$.

3.2 Remarque : $\text{Sphere Vol}(X)$ ne dépend pas de la métrique de référence g choisie pour le calculer, c'est donc un invariant de la structure différentiable de X .

3.3 LEMME. $T_p(g_0, \sqrt{p_0}) = \left(\frac{h(g_0)}{2}\right)^p \text{Vol}(X, g_0)$.

Preuve : L'égalité résulte de

$$g_{\sqrt{p_0}} = \frac{h_0^2}{4n} g_0$$

(cf. 2.6 a). □

Cette égalité fait apparaître un lien entre les quantités T_p et l'entropie, il est précisé dans la proposition suivante :

3.4 PROPOSITION. Pour tout $p > 0$ et toute métrique g ,

$$i) \quad T_p(g) \leq \left(\frac{h(g)}{2}\right)^p \text{Vol}(X, g),$$

$$ii) \quad \text{Sphere Vol}(X) \leq \left(\frac{h(g)^2}{4n}\right)^{n/2} \text{Vol}(X, g).$$

Preuve : Afin de prouver cette inégalité il suffit d'estimer $T_p(g, \Phi)$ pour certaines applications Φ . Nous allons prendre les Φ_c de l'exemple 2.3 b (voir

aussi 2.4). Il est à noter toutefois que l'inégalité

$$g_{\Phi_c} \leq \frac{c^2}{4} g ,$$

qui est démontrée en 2.4, n'est pas suffisante, en effet elle ne donne que

$$T_p(g) \leq n^{p/2} \left(\frac{h(g)}{2} \right)^p \text{Vol}(X, g)$$

par contre, si $\{e_i\}$ est une base g -orthonormée de l'espace tangent à $\tilde{X}$ en x ,

$$\text{Trace}_g(g_{\Phi_c})(x) = \sum_i \int_{\partial \tilde{X}} (e_i \cdot \Phi_c)^2(x, \theta) d\theta .$$

En utilisant, comme dans [BsCoG1, p. 430], le théorème de Pythagore, nous obtenons

$$\text{Trace}_g(g_{\Phi_c})(x) \leq \frac{1}{\int_{\partial \tilde{X}} \Psi_c^2(x, \theta) d\theta} \left(\sum_i \int_{\partial \tilde{X}} (e_i \cdot \Psi_c)^2(x, \theta) d\theta \right)$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la formule donnée dans la preuve du lemme 2.4, il vient

$$\begin{aligned} (e_i \cdot \Psi_c)^2(x, \theta) &\leq \frac{c^2}{4\Psi_c^2} \left(\int_{\tilde{X}} e^{-cd} p_0 dv_g \right) \left(\int_{\tilde{X}} e^{-cd} (e_i \cdot d)^2 p_0 dv_g \right) \\ &\leq \frac{c^2}{4} \left(\int_{\tilde{X}} e^{-cd(x,y)} (e_i \cdot d)^2(x, y) p_0(y, \theta) dv_g(y) \right) . \end{aligned}$$

La différentielle de d étant de norme 1 (pour la métrique g qui définit cette distance),

$$\sum_{i=1}^n (e_i \cdot d)^2(x, y) = 1 \quad \text{pour tout } (x, y)$$

d'où

$$\sum_{i=1}^n (e_i \cdot \Psi_c)^2(x, \theta) \leq \frac{c^2}{4} \Psi_c^2(x, \theta)$$

et donc

$$\text{Trace}_g(g_{\Phi_c})(x) \leq \frac{c^2}{4}$$

on achève la preuve de *i*) en intégrant cette inégalité après l'avoir élevée à la puissance $p/2$, en prenant l'infimum en Φ et en remarquant que

$$h(g) = \inf \{ c \mid \Psi_c(x, \cdot) \in L^2(\partial \tilde{X}, d\theta) \quad \text{pour tout } x \} ;$$

l'inégalité *ii*) découle du fait que

$$\sqrt{\det_g(g_{\Phi})} \leq \left(\frac{1}{n} \text{Trace}_g(g_{\Phi}) \right)^{n/2} .$$

□

4. La méthode de calibration

a) Le cadre classique. C'est une méthode qui a été utilisée par de nombreux auteurs (voir en particulier [Ber] et [Mo] pour des exemples d'utilisation).

À toute application Φ , lipschitzienne, d'une variété riemannienne compacte orientable (X, g) dans une variété hilbertienne N , on peut associer son volume, défini par la formule

$$\text{Vol}(\Phi) = \int_X |\det_g(g_\Phi)|^{1/2} \cdot dv_g ,$$

où g_Φ désigne l'image réciproque par Φ de la métrique hilbertienne de N , qui est définie presque partout, et où $\det_g(g_\Phi)$ est le déterminant des $g_\Phi(e_i, e_j)$ relativement à toute base g -orthonormée $\{e_i\}$. Cette définition est indépendante du choix de g .

Une définition équivalente consiste à définir le volume de Φ comme le supremum, pour toutes les n -formes α ($n = \dim X$) définies sur N , de la quantité

$$V_\Phi(\alpha) = \frac{1}{\text{comasse}(\alpha)} \int_X \Phi^* \alpha ,$$

où la comasse de α est définie comme le supremum, pour tous les $y \in N$ et tous les n -uplets $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ de vecteurs orthonormés de $T_y N$, de $|\alpha_y(Y_1, \dots, Y_n)|$.

Si l'on considère maintenant le supremum de $V_\Phi(\alpha)$ pour toutes les n -formes fermées α , on obtient un invariant, appelé "masse de Φ ", qui minore $\text{Vol}(\Phi)$. La masse ne dépend que de la classe d'homotopie de Φ .

Nous dirons qu'une n -forme fermée ω sur N calibre l'immersion Φ_0 si et seulement si, pour tout point x de X et toute base $U_1, \dots, U_n$ de $T_x X$, on a

$$\begin{aligned} & |\omega_{\Phi_0(x)}(d\Phi_0(U_1), \dots, d\Phi_0(U_n))| \\ &= \text{comasse}(\omega) \cdot \|d\Phi_0(U_1) \wedge \dots \wedge d\Phi_0(U_n)\| , \end{aligned} \quad (4.1)$$

où $\|d\Phi_0(U_1) \wedge \dots \wedge d\Phi_0(U_n)\|$ est égal à $|\det(g_{\Phi_0}(U_i, U_j))_{i,j}|^{1/2}$.

On a la

4.2 PROPOSITION. *S'il existe une n -forme fermée qui calibre l'immersion Φ_0 , alors $\text{Vol}(\Phi_0)$ est le minimum des $\text{Vol}(\Phi)$, pour toutes les Φ lipschitziennes homotopes à Φ_0 .*

Preuve : De la définition ci-dessus, on déduit

$$\text{Vol}(\Phi_0) = \text{masse}(\Phi_0) = \text{masse}(\Phi) \leq \text{Vol}(\Phi) .$$

□

b) Le cadre équivariant. Nous considérons l'ensemble $\mathcal{N}$ des applications lipschitziennes, positives et Γ -équivariantes, de $\tilde{X}$ dans la sphère unité S^∞ de $L^2(\partial\tilde{X})$. Pour toute $\Phi \in \mathcal{N}$, g_Φ passe au quotient, nous pouvons donc définir $\text{Vol}(\Phi)$ comme ci-dessus, par intégration sur X de $|\det_g(g_\Phi)|^{1/2}$. Deux applications Φ_0 et Φ_1 de $\mathcal{N}$ sont toujours homotopes par l'homotopie canonique :

$$H(t, x) = ((1-t)\Phi_0^2(x) + t\Phi_1^2(x))^{1/2}.$$

Remarquons que, si ω est une n -forme fermée sur S^∞ , invariante par l'action de Γ sur S^∞ , alors $H^*(\omega)$ est une forme fermée sur $\tilde{X} \times [0, 1]$ qui passe au quotient en une forme fermée sur $X \times [0, 1]$. En effet nous avons, par équivariance de $H(t, \cdot)$,

$$(H \circ \gamma)(t, x) = H(t, \gamma x) = (\gamma \circ H)(t, x).$$

Ceci implique, du fait de l'invariance de ω ,

$$\gamma^*[H^*\omega] = (H \circ \gamma)^*(\omega) = (\gamma \circ H)^*(\omega) = H^*(\gamma^*\omega) = H^*\omega.$$

De la même manière, $\Phi_0^*(\omega)$ et $\Phi_1^*(\omega)$ passent au quotient sur X . Comme $H^*(\omega)$ est une forme fermée sur $X \times [0, 1]$, on obtient en appliquant la formule de Stokes

$$\int_X \Phi_0^*(\omega) = \int_X \Phi_1^*(\omega).$$

Le fait que Φ_0 , Φ_1 et H ne soient que lipschitziennes ne nuit en rien à l'argument ci-dessus, en effet les formes $\Phi_0^*(\omega)$, $\Phi_1^*(\omega)$ et $H^*(\omega)$ sont définies presque partout et à coefficients bornés donc intégrables. L'égalité ci-dessus peut se prouver rigoureusement par régularisation de Φ_0 et Φ_1 . Nous donnons plus loin un argument faisant intervenir la théorie du degré (voir remarque 4.4).

Nous avons la

4.3 PROPOSITION. *S'il existe une n -forme fermée Γ -invariante qui calibre l'immersion Φ_0 , alors $\text{Vol}(\Phi_0)$ est le minimum des $\text{Vol}(\Phi)$ pour toutes les $\Phi \in \mathcal{N}$ et*

$$\text{Sphere Vol}(X) = \text{Vol}(\Phi_0).$$

Preuve : Du raisonnement précédent et de l'hypothèse de calibration, nous déduisons, pour toute application $\Phi \in \mathcal{N}$ et pour un choix convenable de l'orientation de X ,

$$\begin{aligned} \text{comasse}(\omega) \cdot \text{Vol}(\Phi_0) &= \int_X \Phi_0^*(\omega) = \int_X \Phi^*(\omega) \\ &\leq \text{comasse}(\omega) \cdot \text{Vol}(\Phi). \end{aligned}$$

Le résultat découle alors de la définition même du volume sphérique. $\square$

4.4 Remarque : Dans ce qui suit nous construisons une application

$$\pi : S^\infty \longrightarrow \tilde{X}$$

équivariante sous l'action de Γ , de classe C^∞ et telle que $\pi \circ \Phi_0 = \text{id}$. Nous posons alors $\Omega = \pi^*(\omega_0)$, où ω_0 est la forme volume de $\tilde{X}$ pour la métrique g_0 (localement symétrique de courbure strictement négative). Nous considérons ensuite les applications de $\tilde{X}$ dans $\tilde{X}$, Γ -équivariantes :

$$F_c = \pi \circ \Phi_c ,$$

où Φ_c est définie au chapitre 2 à partir d'une métrique riemannienne sur X .

Les applications F_c sont lipschitziennes et homotopes à l'identité, en effet toutes les Φ_c sont homotopes à $\Phi_0 = \sqrt{p_0}$ et par construction $F_0 = \pi \circ \Phi_0 = \text{id}$. En conséquence, elles sont de degré 1 et donc

$$\int_X \Phi_c^*(\Omega) = \int_X F_c^*(\omega_0) = \int_X \omega_0 = \text{Vol}(X, g_0) = \int_X \Phi_0^*(\Omega) .$$

La théorie du degré s'applique bien sûr dans le cadre lipschitzien (voir [F], p. 383), ce que l'on peut prouver par régularisation.

Dans le chapitre 8, nous traiterons le cas de deux variétés Y et X reliées par une application $f : Y \rightarrow X$ de degré non nul. Nous construisons de même des applications F_c homotopes à f et donc de même degré. Si g_0 désigne toujours la métrique localement symétrique de courbure strictement négative sur X alors l'égalité ci-dessus devient, dans ce cadre :

$$\int_Y F_c^*(\omega_0) = \deg(f) \int_X \omega_0 = \deg(f) \text{Vol}(X, g_0) .$$

Il reste à construire l'application π de manière à ce que $\pi^*(\omega_0)$ calibre le plongement Φ_0 . C'est l'objet du chapitre 5.

5. L'application barycentre et la preuve de l'inégalité principale

a) L'application barycentre. Cette application, introduite par Furstenberg (voir [Fu], [Z], p. 61, et aussi [DoE]), consiste à associer à toute mesure μ positive et sans atome sur $\partial\tilde{X} = S^{n-1}$ l'unique point $x = \text{bar}(\mu)$ défini par les équations implicites

$$\int_{\partial\tilde{X}} dB_{(x,\theta)}(e_i) d\mu(\theta) = 0 ,$$

où B est la fonction de Buseman de la métrique localement symétrique (de courbure strictement négative) g_0 et où $\{e_i\}$ est une base de $T_x\tilde{X}$ (cf. [DoE]). Le groupe G des isométries de $(\tilde{X}, g_0)$ agit sur $\partial\tilde{X}$ et, par image

directe $\mu \mapsto \gamma_*\mu$, sur l'espace des mesures sur $\partial\tilde{X}$. Rappelons que les propriétés de G -équivariance du gradient de la fonction de Buseman et du noyau de Poisson impliquent que

$$\begin{cases} \text{bar}(\gamma_*\mu) = \gamma[\text{bar}(\mu)] , & \text{pour tout } \gamma \in G \\ \text{bar}(p_0(x, \theta)d\theta) = x , \end{cases} \quad (5.1)$$

cette dernière égalité découlant également du fait que $\theta \mapsto -\nabla B_\theta$ réalise un difféomorphisme de $\partial\tilde{X}$ sur $U_x X$ dont le jacobien est précisément p_0 . Pour être complet nous donnons en appendice A la preuve de l'existence et de l'unicité du barycentre.

b) Propriétés de la différentielle de l'application barycentre. Notons S_+^∞ l'ensemble des fonctions strictement positives de norme 1 de $L^2(\partial\tilde{X})$ et considérons l'application π

$$\begin{aligned} \pi : S_+^\infty &\longrightarrow \tilde{X} \\ \varphi &\longrightarrow \text{bar}(\varphi^2(\theta) \cdot d\theta) . \end{aligned}$$

Remarquons que π est équivariante d'après (5.1). Comme $T\tilde{X}$ est trivial, il existe un repère g_0 -orthonormé $\mathcal{C}^\infty$ global $x \mapsto \{e_i(x)\}$. Considérons l'application

$$F : \tilde{X} \times S_+^\infty \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

$$(x, \varphi) \longmapsto \left(\int dB_{(x, \theta)}(e_1(x)) \varphi^2(\theta) d\theta, \dots, \int dB_{(x, \theta)}(e_n(x)) \varphi^2(\theta) d\theta \right) .$$

L'application F étant évidemment $\mathcal{C}^\infty$, pour que l'application π qui vérifie l'équation implicite

$$F(\pi(\varphi), \varphi) = (0, \dots, 0)$$

soit également régulière, il suffit que, pour tout φ fixé, l'application $F_\varphi : x \mapsto F(x, \varphi)$ soit de différentielle inversible en tout point (x, φ) de $F^{-1}(0, \dots, 0)$. Or, pour tout $U \in T_x X$, la i^{e} composante de $dF_\varphi(U)$ est, en un tel point,

$$(dF_\varphi(U))_i = \int DdB_{(x, \theta)}(U, e_i) \varphi^2(\theta) d\theta .$$

Or DdB est la seconde forme fondamentale de l'horosphère " $B(\cdot, \theta) = \text{constante}$ " passant par le point x et centrée en $\theta \in \partial\tilde{X}$. Les courbures principales de cette horosphère sont données par les exposants de Lyapunov, eux mêmes calculables grâce aux champs de Jacobi le long de la géodésique $c : t \rightarrow \exp_x[t \cdot \nabla B(x, \theta)]$. Plus précisément, si $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$ est une base orthonormée de l'espace tangent en x à l'horosphère, formée de vecteurs propres de la seconde forme fondamentale correspondant aux courbures

principales η_i , le parallélisme du tenseur de courbure de $(\tilde{X}, g_0)$ implique que le champ de Jacobi Y_i le long de c donné par $Y_i(0) = v_i$ et $Y_i'(0) = \eta_i \cdot v_i$ est de la forme $Y_i(t) = \varphi_i(t) \cdot V_i(t)$, où V_i est parallèle le long de c . La définition de la seconde forme fondamentale implique par ailleurs que Y_i est donné par une variation de géodésiques normales à l'horosphère qui se rejoignent toutes en θ , ce qui donne $\varphi_i(-\infty) = 0$. Notons J_k les endomorphismes orthogonaux de $T_x \tilde{X}$ induits par la multiplication par les éléments j_k ($1 \leq k \leq d-1$), de carré -1, du corps de base. Le parallélisme du tenseur de courbure implique que la courbure sectionnelle du biplan engendré par $c'(t)$ et $V_i(t)$ est égale à -1 (resp. -4) si v_i est orthogonal à l'espace engendré par les vecteurs $J_k(\nabla B)$ (resp. si v_i appartient à cet espace); l'équation des champs de Jacobi donne alors $\varphi_i(t) = cht + \eta_i sht$ (resp. $\varphi_i(t) = ch(2t) + \frac{1}{2}\eta_i sh(2t)$), la condition en $t = -\infty$ impliquant que $\eta_i = 1$ (resp. $\eta_i = 2$). Comme $DdB(\nabla B, \nabla B) = 0$ et $DdB(v_i, v_j) = \eta_i g_0(v_i, v_j)$, ce calcul des η_i donne :

$$DdB(U, V) = g_0(U, V) - dB(U)dB(V) + \sum_{k=1}^{d-1} dB(J_k U)dB(J_k V)$$

si g_0 est normalisée en sorte que sa courbure soit comprise entre -4 et -1. Dans le cas hyperbolique réel, nous avons en particulier $d = 1$ et $DdB(U, V) = g_0(U, V) - dB(U)dB(V)$, où la métrique est normalisée pour que la courbure sectionnelle soit -1. Nous adopterons donc désormais la convention suivante :

$$\text{si } d = 1 \text{ la somme } \sum_{k=1}^{d-1} dB(J_k U)dB(J_k V) \text{ est nulle.}$$

Notons h le champ de formes quadratiques défini par

$$h_x(U, V) = \int dB_{(x, \theta)}(U) \cdot dB_{(x, \theta)}(V) \varphi^2(\theta) d\theta$$

et H_x l'endomorphisme de $T_x M$ associé via l'égalité

$$g_0(H_x(U), V) = h_x(U, V).$$

La stricte positivité de φ^2 implique que h_x est définie positive. Par ailleurs, le fait que $\sum_{i=1}^n dB(e_i)^2 = 1$ implique que

$$\text{Trace}(h_x) = \int_{\partial \tilde{X}} \varphi^2(\theta) d\theta = 1,$$

d'où le

5.2 LEMME. *Toutes les valeurs propres de H_x sont strictement comprises entre 0 et 1, leur somme vaut 1.*

Un corollaire immédiat est que $I - H_x - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H_x J_k$ est inversible; en effet, les endomorphismes $J_k H_x J_k$ sont définis négatifs ($J_k^2 = -1$) et donc les valeurs propres de l'endomorphisme symétrique $H_x + \sum_{k=1}^{d-1} J_k H_x J_k$ sont également strictement inférieures à 1. Or, comme

$$(dF_\varphi(e_j))_i = g_0 \left(\left(I - H_x - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H_x J_k \right) (e_j), e_i \right),$$

dF_φ est également inversible de $T_x \tilde{X}$ dans $\mathbf{R}^n$. Le théorème des fonctions implicites permet d'en déduire que π est régulière et que, pour toute $u \in T_\varphi(S_+^\infty)$ et toute $\varphi \in \pi^{-1}(x)$, nous avons :

$$d_\varphi \pi(u) = -2 \left(I - H_x - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H_x J_k \right)^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \left(\int dB_{(x,\theta)}(e_i) \cdot u(\theta) \cdot \varphi(\theta) d\theta \right) e_i(x) \right]. \quad (5.3)$$

Rappelons que nous utilisons la convention ci-dessus si $d = 1$.

Nous obtenons ainsi la

5.4 PROPOSITION. π est une submersion $\mathcal{C}^1$, Γ -équivariante, de S_+^∞ sur $\tilde{X}$. Son espace horizontal $\mathcal{H}_\varphi$ au point $\varphi \in \pi^{-1}(x)$ est l'espace engendré par les fonctions

$$E_\varphi^i : \theta \longmapsto -\varphi(\theta) \cdot dB_{(x,\theta)}(e_i)$$

où les $\{e_i\}$ forment une base g_0 -orthonormée de $T_x \tilde{M}$. De plus, il existe une base L^2 -orthonormée $E_\varphi^{u_i}$ de $\mathcal{H}_\varphi$ telle que

$$d_\varphi \pi(E_\varphi^{u_i}) = 2 \left(I - H_x - \sum_{k=1}^{d-1} J_k \cdot H_x J_k \right)^{-1} \circ H_x^{1/2}(e_i).$$

Preuve : Nous avons déjà prouvé la régularité. La Γ -équivariance découle de (5.1), l'action de Γ sur $L^2(\partial \tilde{X})$ étant entrelacée avec l'action sur l'espace des mesures par l'application $\varphi \mapsto \varphi^2(\theta) \cdot d\theta$.

La fibre $\pi^{-1}(x)$ est l'ensemble des φ tels que, pour tout i ,

$$\int \varphi^2(\theta) dB_{(x,\theta)}(e_i) d\theta = 0. \quad (5.5)$$

Le noyau de $d_\varphi \pi$ est donc le sous-espace orthogonal à l'espace $\mathcal{H}_\varphi$ engendré par les E_φ^i ($1 \leq i \leq n$). De la définition du barycentre nous déduisons que $\mathcal{H}_\varphi$ est un sous-espace de l'espace tangent en φ à S_+^∞ . Par (5.3), en utilisant la définition de h_x , nous obtenons

$$d_\varphi \pi(E_\varphi^i) = 2 \left(I - H_x - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H_x J_k \right)^{-1} \circ H_x(e_i).$$

Si on pose $u_i = H_x^{-1/2}(e_i)$, en prenant la racine carrée positive de l'endomorphisme H_x , et $E_\varphi^{u_i} = -dB_{(x,\theta)}(u_i)\varphi(\theta)$ alors

$$\langle E_\varphi^{u_i}, E_\varphi^{u_j} \rangle_{L^2} = g_0(H_x u_i, u_j) = \delta_{ij},$$

la base $E_\varphi^{u_i}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}_\varphi$, qui est donc de dimension n , et

$$d_\varphi \pi(E_\varphi^{u_i}) = 2 \left(I - H_x - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H_x J_k \right)^{-1} \circ H_x^{1/2}(e_i). \quad (5.6)$$

Ceci donne la différentielle de π en φ exprimée entre deux bases orthonormées, l'une de $\mathcal{H}_\varphi$ et l'autre de $T_x \tilde{X}$. Le lemme 5.2 et la remarque qui le suit impliquent que $d_\varphi \pi$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_\varphi$ sur $T_{\pi(\varphi)} \tilde{X}$. Comme $\mathcal{H}_\varphi$ est l'orthogonal au noyau, c'est l'espace horizontal. On en déduit que π est une submersion. Par ailleurs, π est surjective car $\pi \circ \Phi_0 = \text{id}$ (on remarquera de plus que $\pi(\varphi)$ tend vers θ_0 lorsque $\varphi^2(\theta)d\theta$ tend vers la mesure de Dirac δ_{θ_0}). $\square$

c) Fin de la preuve de l'inégalité principale.

5.7 PROPOSITION. *Si ω_0 est la forme volume canonique de $(\tilde{X}, g_0)$, la forme $\pi^* \omega_0$ est une n -forme fermée sur S_+^∞ , invariante par l'action de Γ , qui calibre le plongement $x \mapsto \sqrt{p_0(x, \cdot)}$ (voir le chapitre 2). Nous avons*

$$\text{comasse}(\pi^* \omega_0) = \left(\frac{4n}{h_0^2} \right)^{n/2}.$$

Preuve : Plaçons-nous en un point $\varphi \in \pi^{-1}(x)$. En reprenant les notations précédentes, nous avons, par définition,

$$\|E_\varphi^{u_1} \wedge \cdots \wedge E_\varphi^{u_n}\|_{L^2} = \det(\langle E_\varphi^{u_i}, E_\varphi^{u_j} \rangle_{L^2})^{1/2} = 1,$$

où la norme L^2 a été naturellement étendue à $\Lambda^n(L^2)$. Nous en déduisons, par (5.6) :

$$\frac{|\pi^* \omega_0(E_\varphi^{u_1}, \dots, E_\varphi^{u_n})|}{\|E_\varphi^{u_1} \wedge \cdots \wedge E_\varphi^{u_n}\|} = 2^n \frac{\sqrt{\det(H_x)}}{\det(I - H_x - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H_x J_k)}.$$

Il est prouvé en appendice B que, en dimension $n \geq 3$, cette quantité atteint son maximum lorsque $H_x = \frac{1}{n}I$, ce qui donne

$$\frac{|\pi^* \omega_0(E_\varphi^{u_1}, \dots, E_\varphi^{u_n})|}{\|E_\varphi^{u_1} \wedge \cdots \wedge E_\varphi^{u_n}\|} \leq \left(\frac{4n}{(n+d-2)^2} \right)^{n/2} = \left(\frac{4n}{h_0^2} \right)^{n/2}.$$

Pour tous les $v_1, \dots, v_n \in T_\varphi(S_+^\infty)$, remarquons que $d\pi_\varphi(v_i) = d\pi_\varphi \circ q(v_i)$, où q est la projection L^2 -orthogonale sur $\mathcal{H}_\varphi$, il s'ensuit que

$$\pi^* \omega_0(v_1, \dots, v_n) = \pi^* \omega_0(q(v_1), \dots, q(v_n))$$

comme par ailleurs

$$\|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\| \geq \|q(v_1) \wedge \cdots \wedge q(v_n)\| ,$$

la comasse est atteinte lorsque les v_i sont pris dans $\mathcal{H}_\varphi$ et nous obtenons

$$\text{comasse}(\omega_0) \leq \left(\frac{4n}{h_0^2} \right)^{n/2} .$$

Posons $\Phi_0(x) : \theta \mapsto \sqrt{p_0(x, \theta)}$; de (5.1), nous déduisons $\pi \circ \Phi_0 = \text{id}$, donc

$$\pi^* \omega_0 (d\Phi_0(e_1), \dots, d\Phi_0(e_n)) = 1 .$$

Par ailleurs, nous avons également montré (cf. 2.6 a) que

$$\langle d\Phi_0(e_i), d\Phi_0(e_j) \rangle_{L^2} = \frac{h_0^2}{4n} g_0(e_i, e_j) ,$$

d'où il vient

$$\|d\Phi_0(e_1) \wedge \cdots \wedge d\Phi_0(e_n)\|_{L^2} = \left(\frac{h_0^2}{4n} \right)^{n/2} .$$

Nous en déduisons que la comasse de $\pi^* \omega_0$ vaut exactement $\left(\frac{4n}{h_0^2} \right)^{n/2}$ et que $\pi^* \omega_0$ calibre Φ_0 . Comme $\pi^* \omega_0$ est évidemment fermée parce que ω_0 l'est, il suffit pour conclure de prouver que ω_0 est invariante par l'action de Γ sur S_+^∞ . Ceci découle immédiatement du fait que ω_0 est invariante par l'action de Γ sur $\tilde{X}$ et de l'équivariance de π . Remarquons que $\pi^*(\omega_0)$ est en fait invariant par tout le groupe d'isométrie de g_0 . $\square$

Des propositions 5.7 et 4.3 et du calcul de $\text{Vol}(\Phi_0)$ donné par 2.6 a, nous déduisons immédiatement le

5.8 THÉORÈME. *Le volume sphérique d'une variété compacte localement symétrique de courbure strictement négative (X, g_0) est égal à*

$$(4n)^{-n/2} h(g_0)^n \text{Vol}(g_0) .$$

De la proposition 3.4, ii) et du théorème 5.8, nous déduisons le

5.9 COROLLAIRE. *Soit X une variété, de dimension n supérieure ou égale à 3, qui admet une métrique localement symétrique de courbure strictement négative g_0 . Alors toute autre métrique g vérifie*

$$h(g)^n \cdot \text{Vol}(g) \geq h(g_0)^n \cdot \text{Vol}(g_0) .$$

6. Le cas de la dimension 2 : structure complexe sur $\text{Diff}_+(S^1)/S^1$

Si X est de dimension 2 le problème de l'entropie minimale est résolu dans [K] pour l'entropie topologique et [BsCoG1] pour l'entropie volumique; en ce qui concerne le volume minimal, c'est la formule de Gauß-Bonnet qui donne la solution. La question se pose toutefois de savoir si l'image de Φ_0

dans $S^\infty \subset L^2(S^1, d\theta)$ est calibrée, l'inégalité de l'appendice B n'étant plus valable dans ce cas. Le but de ce chapitre est de répondre par l'affirmative à cette question. Ceci donne une nouvelle démonstration de la

PROPOSITION ([K], [BsCoG1]). *Soit X^2 une surface qui admet une métrique hyperbolique g_0 , alors*

- i) *Sphere $\text{Vol}(X^2) = \frac{1}{8}h(g_0)^2 \cdot \text{Vol}(g_0)$.*
- ii) *Pour toute autre métrique g sur X^2 , on a $h(g)^2 \text{Vol}(g) \geq h(g_0)^2 \text{Vol}(g_0)$.*

La forme calibrante est ici la forme symplectique provenant d'une structure complexe sur S^∞ . Nous donnons ici deux façons de la construire. Ce chapitre est heuristique et le lecteur intéressé par les détails peut consulter les références suivantes : [N], [HoR], [Ki], [Wi] et [P]; nous essayons d'interpréter l'inégalité de calibration, qui prouve notre résultat principal comme correspondant à une géométrie particulière dans S^∞ ; en dimension 2, il s'agit de géométrie kählérienne.

Construction de la forme calibrante. Les notations sont les mêmes que dans les chapitres précédents. Soient trois points $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ sur S^1 , nous allons considérer des fonctions mesurables (pour la mesure de probabilité $d\theta$) bornées $c(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ à valeurs réelles telles que

- i) $c(\gamma\theta_0, \gamma\theta_1, \gamma\theta_2) = c(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$;
- ii) c est antisymétrique;
- iii) c est un cocycle combinatoire, c'est-à-dire

$$dc(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i c(\theta_0, \dots, \hat{\theta}_i, \dots, \theta_3) \equiv 0.$$

Soit $\mathcal{M}_1$ l'espace des mesures de probabilités sur S^1 . Soient $\mu \in \mathcal{M}_1$ et μ_1 et μ_2 des mesures réelles (non nécessairement positives) telles que $\mu_i(S^1) = 0$. Pour la clarté de l'exposé nous supposons toutes les mesures de densité par rapport à $d\theta$, en sorte que les formules suivantes aient un sens.

Nous définissons une 2-forme différentielle sur $\mathcal{M}_1$ par la formule

$$\omega_\mu(\mu_1, \mu_2) = \int_{S^1 \times S^1 \times S^1} c(\theta_0, \theta_1, \theta_2) d\mu(\theta_0) d\mu_1(\theta_1) d\mu_2(\theta_2).$$

En effet, $\mathcal{M}_1$ est un espace affine et μ_1 et μ_2 appartiennent à l'espace tangent en μ à $\mathcal{M}_1$. Le fait que ω soit une forme différentielle provient de l'antisymétrie de c . Le groupe fondamental Γ de X agit sur $\mathcal{M}_1$ et donc sur $\Lambda^2(\mathcal{M}_1)$, l'espace des 2-formes différentielles sur $\mathcal{M}_1$. La propriété i), satisfaite par c , montre que

$$\gamma^*(\omega) = \omega \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Le point clef est donné par la proposition suivante prouvée dans [BsCoG1], p. 439, ou [Gr1].

6.1 PROPOSITION. *La forme ω est fermée.*

C'est la fermeture de c comme cocycle combinatoire qui permet de prouver la proposition 6.1.

Maintenant, comme dans [BsCoG1], on peut considérer l'application

$$\begin{aligned} K : S^\infty &\longrightarrow \mathcal{M}_1 \\ \varphi &\longmapsto \varphi^2(\theta)d\theta \end{aligned}$$

alors, si c est un cocycle combinatoire sur S^1 vérifiant i), ii) et iii),

$$\Omega = \frac{1}{4} K^*(\omega)$$

est une 2-forme fermée sur $S^\infty \subset L^2(S^1, d\theta)$. C'est un procédé standard de construction de formes différentielles sur $\mathcal{M}_1$ (cf. [Gr1], p. 241) et donc sur S^∞ ; on peut alors espérer que, par un choix judicieux du cocycle c , on trouve une forme calibrante pour le plongement $\Phi_0 = \sqrt{p_0}$.

Choisissons une orientation de S^1 , par exemple celle qui vient naturellement de l'orientation de $\tilde{X}$, alors si $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ sont trois points de S^1 on dit qu'ils sont dans le bon ordre (circulaire) si θ_1 est entre θ_0 et θ_2 lorsque l'on parcourt S^1 dans le sens de l'orientation choisie.

6.2 THÉORÈME. *Soit c défini par*

$$\begin{cases} c(\theta_0, \theta_1, \theta_2) = +1 & \text{si } (\theta_0, \theta_1, \theta_2) \text{ est dans le bon ordre} \\ c(\theta_0, \theta_1, \theta_2) = -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors la forme Ω correspondante calibre Φ_0 .

Preuve : La cochaîne c peut être définie différemment; en effet, si T désigne le triangle hyperbolique (à côtés géodésiques) de sommets θ_0, θ_1 et θ_2 , alors

$$c(\theta_0, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\pi} \text{ volume algébrique } (T)$$

où T est orienté positivement si les trois sommets sont dans le bon ordre et négativement sinon. En particulier c est un cocycle obtenu par intégration d'une forme volume. Les formes ω et Ω sont donc fermées d'après la proposition 6.1. Remarquons que, puisque ω est linéaire par rapport au point base dans l'espace affine $\mathcal{M}_1$,

$$d\omega_\mu(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = 3 \int_{S^1 \times S^1 \times S^1} c(\theta_0, \theta_1, \theta_2) d\mu_0(\theta_0) d\mu_1(\theta_1) d\mu_2(\theta_2) = 0$$

pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1$ et toutes mesures μ_i vérifiant

$$\mu_i(S^1) = 0, \quad i = 0, 1, 2.$$

En d'autres termes ω s'annule dès que les trois mesures figurant dans la formule qui la définit sont de masse totale nulle.

Soient alors $\varphi \in S^\infty$ et f_1 et f_2 deux vecteurs tangents à S^∞ en φ ; les vecteurs f_1 et f_2 sont donc des fonctions de $L^2(S^1, d\theta)$ vérifiant

$$\int_{S^1} f_i(\theta) \varphi(\theta) d\theta = 0, \quad i = 1, 2.$$

Nous les supposons également normés (dans $L^2(S^1, d\theta)$). Alors

$$\Omega_\varphi(f_1, f_2) = \int_{S^1 \times S^1 \times S^1} c(\theta_0, \theta_1, \theta_2) \varphi^2(\theta_0) \varphi(\theta_1) f_1(\theta_1) \varphi(\theta_2) f_2(\theta_2) d\theta_0 d\theta_1 d\theta_2;$$

d'après la remarque précédente, et puisque $\int_{S^1} (\varphi^2 - 1)(\theta) d\theta = 0$, la fermeture de Ω implique que

$$\Omega_\varphi(f_1, f_2) = \int_{S^1} d\theta_0 \int_{S^1 \times S^1} c(\theta_0, \theta_1, \theta_2) \varphi(\theta_1) f_1(\theta_1) \varphi(\theta_2) f_2(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2.$$

Désormais, nous identifierons le cercle S^1 à $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et les points θ_i désigneront des nombres modulo 1. Notons que c est invariant par toutes les transformations de Möbius préservant l'orientation (et pas seulement par les éléments de Γ). Si R est la rotation autour de l'origine (une translation dans notre modèle) telle que $R(0) = \theta_0$, alors

$$\begin{aligned} & \int_{S^1 \times S^1} c(\theta_0, \theta_1, \theta_2) (\varphi f_1)(\theta_1) (\varphi f_2)(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \int_{S^1 \times S^1} c(0, R^{-1}(\theta_1), R^{-1}(\theta_2)) (\varphi f_1)(R^{-1}(\theta_1)) (\varphi f_2)(R^{-1}(\theta_2)) d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned}$$

et donc, quitte à changer θ_1 et θ_2 on peut toujours supposer que $\theta_0 = 0$. Alors dans ce cas

$$c(0, \theta_1, \theta_2) = \text{signe}(\theta_2 - \theta_1).$$

On considère alors l'expression

$$I = \int_{S^1 \times S^1} \text{signe}(\theta_2 - \theta_1) (\varphi f_1)(\theta_1) (\varphi f_2)(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \Omega_\varphi(f_1, f_2)$$

les deux fonctions φf_1 et φf_2 étant d'intégrale nulle sur S^1 , elles possèdent des primitives notées F_1 et F_2 respectivement, et

$$I = \int_{S^1 \times S^1} \text{signe}(\theta_2 - \theta_1) dF_1 \wedge dF_2 = \int_{S^1 \times S^1} \text{signe}(\theta_2 - \theta_1) d(F_1 dF_2).$$

Un calcul direct donne, en intégrant séparément sur $\theta_1 < \theta_2$ et sur $\theta_1 > \theta_2$,

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{S^1} F_1(\theta) dF_2(\theta) - 2F_1(0) \int_{S^1} dF_2(\theta) \\ &= 2 \int_{S^1} F_1(\theta) dF_2(\theta). \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{C}$ l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : S^1 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ \theta &\longmapsto (F_1(\theta), F_2(\theta)) \end{aligned}$$

la quantité $\int_{S^1} F_1(\theta) dF_2(\theta)$ est l'aire enclose par la courbe fermée $\mathcal{C}(S^1)$. L'inégalité isopérimétrique classique dans $\mathbf{R}^2$ donne donc

$$2\pi|I| \leq (\text{longueur}(\mathcal{C}(S^1)))^2.$$

Or

$$\begin{aligned} \text{longueur}(\mathcal{C}(S^1)) &= \int_{S^1} \sqrt{(F_1'(\theta))^2 + (F_2'(\theta))^2} d\theta \\ &= \int_{S^1} \varphi(\theta) \sqrt{f_1^2(\theta) + f_2^2(\theta)} d\theta \\ &\leq \left(\int_{S^1} \varphi^2(\theta) d\theta \right)^{1/2} \left(\int_{S^1} (f_1^2(\theta) + f_2^2(\theta)) d\theta \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs $\varphi \in S^\infty$ et f_1 et f_2 sont également normées par hypothèse donc

$$2\pi|I| \leq 2.$$

D'autre part, si $\varphi = 1$, la fonction constante égale à 1, et $f_1(\theta) = \sqrt{2} \cos(2\pi\theta)$ et $f_2(\theta) = \sqrt{2} \sin(2\pi\theta)$, les inégalités précédentes sont toutes des égalités. Mais $\Phi_0(o) = 1$ et les deux fonctions $\sqrt{2} \cos(2\pi\theta)$ et $\sqrt{2} \sin(2\pi\theta)$ forment une base orthonormée de l'espace tangent à l'image de Φ_0 dans S^∞ au point 1.

En conclusion la valeur maximale de la forme Ω est atteinte sur l'espace tangent à l'image de Φ_0 en 1. De l'invariance de c par le groupe de Möbius on déduit la constance de Ω le long de l'image Φ_0 (rappelons que l'image de Φ_0 est l'orbite de 1 sous l'action du groupe de Möbius dans S^∞).

Ceci prouve l'inégalité de calibration. $\square$

6.3 Remarques : i) La preuve précédente fait apparaître l'inégalité principale, comparant les entropies volumiques, comme une inégalité de type isopérimétrique. En fait, si on fixe le revêtement universel $\tilde{X}$ et son bord géométrique $\partial\tilde{X} \simeq S^1$, si g est une métrique sur X que l'on relève sur $\tilde{X}$, alors $h(g)$ représente une notion de "volume du bord" $\partial\tilde{X}$ et $\text{Vol}(X, g)$ remplace le volume de l'intérieur d'un domaine en sorte que l'inégalité se lit comme suit : parmi toutes les métriques sur X de volume fixé, celle qui donne le plus petit "volume du bord géométrique" est la métrique hyperbolique. Voir la proposition 9.11 pour un résultat précis relevant de cette idée.

ii) En dimension supérieure ou égale à trois et dans le cas hyperbolique réel, on peut également utiliser des constructions analogues de formes différentielles sur S^∞ ; plus précisément, si $n = \dim X$ et $\theta_0, \dots, \theta_n$ sont $n + 1$ points sur $\partial \tilde{X} \simeq S^{n-1}$ on peut définir $c(\theta_0, \dots, \theta_n)$ comme le volume orienté du simplexe géodésique idéal de sommets θ_i (ici g_0 est supposée hyperbolique réelle). Toutefois la méconnaissance de cette fonction ne nous a pas permis, à ce jour, de montrer que la forme correspondante calibre le plongement Φ_0 . Nonobstant, une première étape en ce sens est franchie dans [BsCoG3].

Structure complexe sur $\text{Diff}(S^1)/S^1$. Pour deux fonctions u_1 et u_2 sur le cercle, suffisamment régulières, l'expression $\int_{S^1} u_1(\theta) du_2(\theta)$ semble jouer un rôle fondamental. Il se trouve qu'elle définit une structure kählérienne sur un espace de dimension infinie. Plus précisément, si $\varphi \in S^\infty$ est assez régulière, il existe un difféomorphisme F du cercle, préservant l'orientation, tel que

$$\varphi^2(\theta) d\theta = F_*(d\theta) = \text{Jac}(F^{-1}(\theta)) d\theta.$$

Par la suite nous passerons sous silence les détails techniques tels que les problèmes de régularité, ce chapitre ayant vocation à être descriptif et explicatif uniquement.

L'équation ci-dessus montre également que les seuls difféomorphismes du cercle qui stabilisent $d\theta$ sont les rotations, identifiées à des éléments de S^1 ; nous construisons ainsi une bijection

$$A : \text{Diff}_+(S^1)/S^1 \longrightarrow S^\infty$$

où $\text{Diff}_+(S^1)$ désigne l'ensemble des difféomorphismes du cercle préservant l'orientation. $\text{Diff}_+(S^1)$ agit simultanément et transitivement sur $\text{Diff}_+(S^1)/S^1$ (par action à gauche) et sur S^∞ (en définissant l'action de h sur φ par la relation $(h\varphi)(\theta) = \varphi \circ h^{-1}(\theta) \sqrt{\text{Jac } h^{-1}(\theta)}$). L'application bijective A entrelace ces deux actions. Remarquons que la 2-forme Ω , définie sur S^∞ (cf. 6.1), est invariante par l'action de $\text{Diff}_+(S^1)$ sur S^∞ . En effet, la définition de Ω et le théorème de changement de variables donnent :

$$\begin{aligned} \Omega_{h\varphi}(hf_1, hf_2) &= \int_{S^1 \times S^1 \times S^1} c(h(\theta_0), h(\theta_1), h(\theta_2)) \varphi^2(\theta_0) \cdot (\varphi f_1)(\theta_1) (\varphi f_2)(\theta_2) d\theta_0 d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \Omega_\varphi(f_1, f_2), \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de l'invariance de c par les difféomorphismes qui préservent l'orientation. Une conséquence immédiate est que $\alpha = 2A^*\Omega$ est une 2-forme fermée sur $\text{Diff}_+(S^1)/S^1$, invariante par l'action de $\text{Diff}_+(S^1)$. Pour construire α , il suffit donc de donner sa valeur sur l'espace tangent en l'identité à $(\text{Diff}_+(S^1)/S^1)$, ce qui se fait comme suit :

L'espace tangent à $\text{Diff}_+(S^1)$ en l'identité s'identifie aux champs de vecteurs sur S^1 , qui s'écrivent $v(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}$, où v est une fonction sur S^1 . Le quotient par les rotations permet de les normaliser par la condition $\int_{S^1} v(\theta)d\theta=0$. On peut donc écrire,

$$T_{\text{id}}(\text{Diff}_+(S^1)/S^1) = \left\{ v \setminus \int_{S^1} v(\theta)d\theta = 0 \right\}.$$

Un calcul immédiat montre que la correspondance A se différencie en

$$D_{\text{id}}A(v) = \frac{1}{2}\text{div}\left(v(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = -\frac{1}{2}v'.$$

L'expression de Ω donnée dans la section précédente se transporte donc sur $T_{\text{id}}(\text{Diff}_+(S^1)/S^1)$ en

$$\alpha(v_1, v_2) = \int_{S^1} v_1(\theta)v_2'(\theta)d\theta$$

(à une constante près). Remarquons que l'intégration qui a été nécessaire dans la preuve de la proposition 6.2 se justifie par la formule ci-dessus pour $D_{\text{id}}A$.

Dans [Wi], [Ki] et [KiY] il est montré (voir surtout [Wi]) que l'espace $\text{Diff}_+(S^1)/S^1$, qui est homogène sous l'action de $\text{Diff}_+(S^1)$, peut être vu comme orbite co-adjointe de ce groupe. Alors, par la théorie de Kostant-Kirillov, il hérite d'une structure symplectique homogène; celle-ci s'explicite sur $T_{\text{id}}(\text{Diff}_+(S^1)/S^1)$, où son expression coïncide avec celle de α donnée ci-dessus. La forme symplectique est donc partout égale à α .

De plus, dans les articles [Ki], [KiY], [HoR] [P], [N] et [Wi] les auteurs montrent que $\text{Diff}_+(S^1)/S^1$ est muni d'une structure complexe homogène (voir [KiY]) qui, associée à la structure symplectique, fait de $\text{Diff}_+(S^1)/S^1$ une variété kählérienne. La structure complexe étant homogène, il suffit de la décrire sur $T_{\text{id}}(\text{Diff}_+(S^1)/S^1)$, c'est-à-dire de définir $J(v)$ pour une fonction v d'intégrale nulle sur le cercle (J est ici la structure complexe). Elle est bien définie par sa valeur sur la base $(\cos(2\pi n\theta), \sin(2\pi n\theta))_{n \geq 1}$, où elle est donnée par

$$\begin{cases} J(\cos(2\pi n\theta)) = -\sin(2\pi n\theta) & \text{si } n > 0 \\ J(\sin(2\pi n\theta)) = \cos(2\pi n\theta) & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

(la condition $J^2 = -1$ donnant sa valeur sur $\sin(2\pi n\theta)$) c'est-à-dire dans chaque sous-espace vectoriel de dimension 2, engendré par les deux fonctions $\cos(2\pi n\theta)$ et $\sin(2\pi n\theta)$, c'est la structure complexe canonique de $\mathbf{R}^2$ si $n > 0$.

Maintenant, si Möb désigne le groupe des isométries hyperboliques de l'espace hyperbolique de dimension 2, $\text{Möb}/S^1$ est une sous-variété de

dimension 2 de $\text{Diff}_+(S^1)/S^1$ qui est en bijection avec l'image de Φ_0 , par l'application A . L'espace tangent à cette variété en id est le sous-espace vectoriel J -invariant engendré par les deux fonctions $\cos(2\pi\theta)$ et $\sin(2\pi\theta)$. De l'homogénéité de la structure complexe et du fait que l'image de Φ_0 est l'orbite d'un sous-groupe de $\text{Diff}_+(S^1)$ on déduit que l'image de Φ_0 est une sous-variété complexe de $\text{Diff}_+(S^1)/S^1$. Comme toute sous-variété complexe d'une variété kählérienne, elle est calibrée par la forme de Kähler notée α . Ceci ne termine toutefois pas la preuve géométrique que nous cherchions, en effet, transportons la structure complexe et la forme symplectique sur S^∞ par l'identification A , alors l'inégalité de calibration ainsi obtenue s'écrit, par exemple en $\mathbb{1}$,

$$|2\Omega(U, V)| \leq \|U \wedge V\|_{\text{Kähler}}$$

où U et V sont des vecteurs tangents en $\mathbb{1}$ à S^∞ (c'est-à-dire des fonctions L^2 d'intégrale nulle) et $\|\cdot\|_{\text{Kähler}}$ est la métrique kählérienne de $\text{Diff}_+(S^1)/S^1$, transportée sur S^∞ . Par définition de la forme de Kähler, on a

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle_{\text{Kähler}} &= 2|\Omega(f, Jf)| = 4 \left| \int Jf(\theta) \cdot F(\theta) d\theta \right| \\ &\leq 4 \|J(f)\|_{L^2} \|F\|_{L^2}, \end{aligned}$$

où F est la primitive d'intégrale nulle de f . L'inégalité de Parseval donne $\|F\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^2}$. Par ailleurs, J opère par permutations des $\pm \sin(2\pi n\theta)$ en $\pm \cos(2\pi n\theta)$ (et réciproquement) et laisse donc la norme L^2 invariante. On peut aussi utiliser la décomposition en série de Fourier de f en effet si $f(\theta) = \sum_{n \neq 0} a_n e^{2i\pi n\theta}$, avec $\bar{a}_n = a_{-n}$ car la fonction f est réelle, alors

$$(Jf)(\theta) = i \left(\sum_{n>0} a_n e^{2i\pi n\theta} - \sum_{n<0} a_n e^{2i\pi n\theta} \right)$$

et

$$\langle f, f \rangle_{\text{Kähler}} = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} |a_n|^2 \leq \frac{2}{\pi} \|f\|_{L^2}^2;$$

ces deux approches conduisent à l'inégalité

$$|\Omega(U, V)| \leq \frac{1}{2} \|U \wedge V\|_{\text{Kähler}} \leq \frac{1}{\pi} \|U \wedge V\|_{L^2}$$

qui est de plus une égalité lorsque les deux vecteurs U et V ne contiennent dans leur développement en série de Fourier que les termes en $\cos(2\pi\theta)$ et $\sin(2\pi\theta)$, c'est-à-dire lorsque U et V sont tangents à l'image de Φ_0 . La forme α calibre donc bien l'image de Φ_0 comme sous-variété de S^∞ muni de sa structure euclidienne L^2 .

6.4 Conclusion. En dimension $n \geq 3$ on peut aussi identifier S^∞ à $\text{Diff}_+(S^{n-1})/S\text{Diff}(S^{n-1})$, où $S\text{Diff}(S^{n-1})$ désigne l'ensemble des difféomorphismes préservant l'élément de volume canonique $d\theta$. La sous-variété image de Φ_0 , vue dans cet espace, est également calibrée. Il reste toutefois à interpréter l'inégalité de calibration comme correspondant à une géométrie. En particulier si $n = 4$ peut-on interpréter l'image de Φ_0 comme une sous-variété quaternionnienne par exemple, lorsque X est muni d'une métrique hyperbolique réelle (qui est aussi, en dimension 4 réelle, une métrique hyperbolique quaternionnienne)? Que dire si X est muni d'une métrique hyperbolique complexe (de dimension 2)?

7. Le cas d'égalité

Nous étudions maintenant le cas d'égalité dans l'inégalité principale 5.9. Il est crucial pour obtenir le théorème de rigidité dynamique ainsi que la nouvelle preuve du théorème de rigidité de G.D. Mostow (voir le chapitre 9 et [Mos]).

Plus précisément nous allons prouver

7.1 PROPOSITION. *Soit X une variété riemannienne compacte connexe et orientée de dimension $n \geq 3$, munie d'une métrique localement symétrique de courbure strictement négative g_0 et soit g une métrique telle que*

$$\text{Vol}(g) = \text{Vol}(g_0) \quad \text{et} \quad h(g) = h(g_0) = h_0,$$

alors g est isométrique à g_0 .

Preuve : Nous considérons de nouveau les applications Γ -équivariantes $\Phi_c : \tilde{X} \rightarrow S^\infty$ associées à la métrique g et définies dans l'exemple 2.3.b et dans le lemme 2.4, la méthode consiste à construire l'isométrie comme limite d'une sous-suite de la famille d'applications F_c , définies par :

$$F_c(y) = \text{bar}(\Phi_c^2(y, \theta)d\theta) \quad \text{pour } y \in \tilde{X},$$

correspondant à des valeurs de c qui tendent vers $h(g) = h_0$. Rappelons que, pour tout c , F_c est une application lipschitzienne et Γ -équivariante de $\tilde{X}$ dans $\tilde{X}$. Nous la considérerons donc aussi comme une application de X dans X .

Le travail va porter sur les valeurs propres des formes quadratiques suivantes :

$$h_y^c(\cdot, \cdot) = \int_{\partial \tilde{X}} (dB_{(F_c(y), \theta)}(\cdot))^2 \Phi_c^2(y, \theta) d\theta,$$

nous les rangeons par ordre croissant et les noterons

$$0 < \mu_1^c(y) \leq \dots \leq \mu_n^c(y) < 1.$$

Ce sont des fonctions Γ -invariantes sur $\tilde{X}$, donc définies sur X . De même, nous noterons H_y^c l'endomorphisme associé à h_y^c via la métrique g_0 . Remarquons que, contrairement aux notations du chapitre 5, l'indice y dans h_y^c et H_y^c réfère au point dans la source de l'application F_c et pas au barycentre de la mesure considérée qui se trouve dans le but de F_c .

1^{re} ÉTAPE. *Convergence presque sûre des μ_i^c .* Nous étudions le jacobien des applications F_c de $(\tilde{X}, \tilde{g})$ dans $(\tilde{X}, \tilde{g}_0)$. Nous désignerons par ω_0 (resp. ω_g) la forme volume de $(\tilde{X}, \tilde{g}_0)$ (resp. $(\tilde{X}, \tilde{g})$). Rappelons que le Jacobien des applications F_c est défini presque partout.

7.2 LEMME. $|\text{Jac}(F_c)| \leq 1 + \varepsilon(c)$ où $\varepsilon(c) \xrightarrow{c \rightarrow h_0} 0$.

Preuve : Notons $\Omega = \pi^* \omega_0$ la forme calibrante du chapitre 5. Soit $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ une base g -orthonormée en y

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_0^2}{4n}\right)^{n/2} |\text{Jac}(F_c)(y)| &= \left(\frac{h_0^2}{4n}\right)^{n/2} |\omega_0|_{F_c(x)}(d_y F_c(e'_1), \dots, d_y F_c(e'_n))| \\ &= \left(\frac{h_0^2}{4n}\right)^{n/2} |\Omega_{\Phi_c(y)}(d_y \Phi_c(e'_1), \dots, d_y \Phi_c(e'_n))| \end{aligned}$$

et, d'après la proposition 5.7 et la majoration de $\text{Trace}_g(g_{\Phi_c})$ donnée dans la preuve de la proposition 3.4,

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_0^2}{4n}\right)^{n/2} |\text{Jac}(F_c)(y)| &\leq \|d_y \Phi_c(e'_1) \wedge \dots \wedge d_y \Phi_c(e'_n)\|_{L^2} \\ &= |\det_g g_{\Phi_c}(y)|^{1/2} \leq \left(\frac{1}{n} \text{Trace}_g(g_{\Phi_c})(y)\right)^{n/2} \\ &\leq \left(\frac{c^2}{4n}\right)^{n/2} = \left(\frac{h_0^2}{4n}\right)^{n/2} \left(\frac{c}{h_0}\right)^n \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. □

7.3 LEMME. Il existe une suite c_k tendant vers h_0 telle que $|\text{Jac } F_{c_k}(y)| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$ presque sûrement sur X (et donc sur $\tilde{X}$).

Preuve : Posons $f_c = |\text{Jac}(F_c)| - 1$ et $f_c^\pm = \sup(0, \pm f_c)$; f_c^+ tend uniformément vers 0 d'après le lemme 7.2. Les applications F_c sont toutes de degré 1 car elles sont homotopes à l'identité (cf. la remarque 4.4), en conséquence

$$\begin{aligned} \text{Vol}(g_0) &= \int_X \omega_0 = \int_X F_c^*(\omega_0) \leq \int_X |\text{Jac } F_c(y)| dv_g \\ &\leq (1 + \varepsilon(c)) \text{Vol}(g) - \int_X f_c^- dv_g. \end{aligned}$$

L'hypothèse $\text{Vol}(g) = \text{Vol}(g_0)$ implique alors que f_c^- tend vers 0 au sens L^1 lorsque c tend vers h_0 , d'où l'existence d'une sous-suite c_k telle que $f_{c_k}^-$ tende vers zéro presque sûrement. $\square$

7.4 LEMME. *Pour presque tout $y \in X$ et pour tout $j = 1, 2, \dots, n$ on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_j^{c_k}(y) = \frac{1}{n}$.*

Preuve : Comme dans le lemme 7.2, considérons une base $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ g -orthonormée en y ; d'après les preuves des propositions 5.7 et 7.2, on a

$$\begin{aligned} &|\Omega_{\Phi_c(y)}(d_y \Phi_c(e'_1), \dots, d_y \Phi_c(e'_n))| \\ &\leq \frac{2^n (\det(H_y^c))^{1/2}}{\det(I - H_y^c - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H_y^c J_k)} \|d_y \Phi_c(e'_1) \wedge \dots \wedge d_y \Phi_c(e'_n)\|_{L^2} \\ &\leq \frac{2^n (\det(H_y^c))^{1/2}}{\det(I - H_y^c - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H_y^c J_k)} \left(\frac{c^2}{4n}\right)^{n/2}. \end{aligned}$$

Dans la proposition B.5 (Appendice B) nous montrons l'existence d'une constante A telle que

$$\frac{2^n (\det(H_y^c))^{1/2}}{\det(I - H_y^c - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H_y^c J_k)} \leq \left(\frac{4n}{h_0^2}\right)^{n/2} \left(1 - A \sum_{j=1}^n \left(\mu_j^c(y) - \frac{1}{n}\right)^2\right)$$

d'où

$$|\Omega_{\Phi_c(y)}(d_y \Phi_c(e'_1), \dots, d_y \Phi_c(e'_n))| \leq \left(\frac{c}{h_0}\right)^n \left(1 - A \sum_{j=1}^n \left(\mu_j^c(y) - \frac{1}{n}\right)^2\right)$$

comme précédemment (cf. la preuve du lemme 7.2), nous avons :

$$|\text{Jac } F_c(y)| = |\Omega_{\Phi_c(y)}(d_y \Phi_c(e'_1), \dots, d_y \Phi_c(e'_n))|$$

ce qui conduit à l'inégalité

$$\sum_{j=1}^n \left(\mu_j^c(y) - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{A} \left(1 - \left(\frac{h_0}{c}\right)^n |\text{Jac } F_c(y)|\right)$$

et donc

$$\sum_{j=1}^n \left(\mu_j^{c_k}(y) - \frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \text{ presque sûrement d'après le lemme 7.3,}$$

en d'autres termes $H_y^{c_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} I$ presque sûrement.

2^e ÉTAPE. *Convergence uniforme d'une sous-suite des F_c .* Nous allons maintenant montrer qu'une sous-suite de la famille F_c constitue une famille équicontinue d'applications lipschitziennes. Pour simplifier les notations nous noterons F_k, μ_j^k, h_y^k et H_y^k les sous-suites $F_{c_k}, \mu_j^{c_k}, h_y^{c_k}$ et $H_y^{c_k}$.

7.5 LEMME. *La suite des sections $H^k : y \mapsto H_y^k$ converge vers $\frac{1}{n}I$ uniformément sur X .*

En préalable à la preuve du lemme 7.5, nous allons établir les lemmes 7.5.a et 7.5.b ci-dessous :

LEMME 7.5.a. *Si y et y' sont deux points de X tels que $\mu_n^k \leq 1 - \frac{1}{n}$ en tout point d'une g -géodésique minimisante α qui joint y à y' , alors $d_{g_0}[F_k(y), F_k(y')] \leq K_1 \cdot d_g(y, y')$, où d_{g_0} et d_g sont les distances riemanniennes sur X associées aux métriques g_0 et g .*

Preuve : Rappelons que, d'après 2.6.b, pour tout vecteur u g -unitaire en $z \in \tilde{X}$,

$$\|d\Phi_{c_k}(u)\|_{L^2(\partial\tilde{X})}^2 \leq \frac{c_k^2}{4}$$

de telle sorte que l'image γ par Φ_{c_k} du segment géodésique α vérifie

$$\text{longueur}(\gamma) \leq \frac{c_k}{2} d_g(y, y').$$

D'après (5.6) la différentielle de π en un point $\varphi \in S^\infty$ se calcule à l'aide de l'endomorphisme symétrique

$$2\left(I - H - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H J_k\right)^{-1} \circ H^{1/2}$$

où H est calculé au point φ . Nous avons déjà remarqué que l'endomorphisme symétrique $\sum_{k=1}^{d-1} J_k H J_k$ est négatif et en conséquence les valeurs propres de $I - H - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H J_k$ sont supérieures à $1 - \mu_n$, la plus petite valeur propre de $I - H$, d'où, pour tout t et pour tout vecteur unitaire $v \in L^2(\partial\tilde{X})$ tangent à la sphère unité de $L^2(\partial\tilde{X})$ en $\gamma(t)$,

$$\|d_{\gamma(t)}\pi(v)\|_{g_0} \leq \frac{2\sqrt{\mu_n^k(\alpha(t))}}{1 - \mu_n^k(\alpha(t))} \leq 2n.$$

Puisque $\pi \circ \Phi_{c_k} = F_k$ nous en déduisons, par le théorème des accroissements finis,

$$d_{g_0}(F_k(y), F_k(y')) \leq 2n h_0 d_g(y, y'). \quad \square$$

LEMME 7.5.b. *Si P est le transport parallèle de $F_k(y)$ à $F_k(y')$ le long de la g_0 -géodésique minimisante qui les joint, on a*

$$\|h_{y'}^k \circ P - h_y^k\| \leq K_2 [d_g(y, y') + d_{g_0}(F_k(y), F_k(y'))].$$

Preuve : Soit maintenant $\beta(t)$ la g_0 -géodésique minimisante allant de $F_k(y)$ à $F_k(y')$ et Y un champ parallèle le long de β de norme 1. On pose $Y_{F_k(y)} = Y_0$ et $Y_{F_k(y')} = Y_2$. Nous avons, par le théorème des accroissements finis et le parallélisme de Y ,

$$\begin{aligned} |dB_{(F_k(y'), \theta)}(Y_2) - dB_{(F_k(y), \theta)}(Y_0)| &\leq \left(\sup_t |DdB_{\beta(t)}(\dot{\beta}, Y)| \right) d_{g_0}(F_k(y), F_k(y')) \\ &\leq 2d_{g_0}(F_k(y), F_k(y')) ; \end{aligned}$$

cette dernière inégalité repose sur l'expression explicite de DdB (voir le chapitre 5) et sur le fait que Y et $\dot{\beta}(t)$ sont unitaires. En remarquant que, pour tout x, x' et U, V ,

$$|dB_{(x, \theta)}(U) + dB_{(x', \theta)}(V)| \leq 2 \sup(|U|, |V|)$$

et en rappelant que $\Phi_{c_k}^2(y, \theta) d\theta$ est une mesure de probabilité sur $\partial\tilde{X}$, nous déduisons que

$$\left| \int_{\partial\tilde{X}} [dB_{(F_k(y'), \theta)}(Y_2)^2 - dB_{(F_k(y), \theta)}(Y_0)^2] \Phi_{c_k}^2(y, \theta) d\theta \right| \leq 4d_{g_0}(F_k(y'), F_k(y)) .$$

De même, du fait que $\|dB\|_{g_0} = 1$ nous déduisons que

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\partial\tilde{X}} (dB_{(F_k(y'), \theta)}(Y_2))^2 (\Phi_{c_k}^2(y', \theta) - \Phi_{c_k}^2(y, \theta)) d\theta \right| \\ &\leq (\|\Phi_{c_k}(y') - \Phi_{c_k}(y)\|_{L^2(\partial\tilde{X})}) (\|\Phi_{c_k}(y') + \Phi_{c_k}(y)\|_{L^2(\partial\tilde{X})}) \\ &\leq 2 \text{ longueur } (\gamma) \leq c_k \cdot d_g(y, y') , \end{aligned}$$

où γ désigne, comme dans le lemme 7.5.a, l'image par Φ_{c_k} du segment géodésique α qui joint y à y' . En additionnant ces inégalités, il vient

$$|h_{y'}^k(Y_2, Y_2) - h_y^k(Y_0, Y_0)| \leq K_2 [d_g(y, y') + d_{g_0}(F_k(y), F_k(y'))] . \quad \square$$

Fin de la preuve du lemme 7.5: D'après le théorème d'Egoroff ([F], p. 77) et le lemme 7.4, pour tout $\eta > 0$ (suffisamment petit), il existe un ensemble mesurable K tel que

$$i) \text{ Vol}_g(X \setminus K) < \eta$$

$$ii) \text{ sur } K, \text{ la suite de sections } y \mapsto H_y^k \text{ converge uniformément vers } \frac{1}{n}I.$$

Ayant préalablement fixé un ε positif suffisamment petit, on peut choisir η assez petit et K de sorte que $X \setminus K$ ne contienne aucune g -boule de rayon ε (en effet, le g -volume de celles-ci est uniformément minoré sur la variété compacte X). On peut également choisir $N \in \mathbb{N}$ de sorte que :

$$i) \text{ pour tout } k \geq N, h_0 < c_k < h_0 + \varepsilon$$

$$ii) \text{ pour tout } k \geq N \text{ et pour tout } y \in K$$

$$\left\| H_y^k - \frac{1}{n}I \right\| < \varepsilon .$$

L'hypothèse faite sur K implique par ailleurs que, pour tout $y \in X$, $d_g(y, K) < \varepsilon$, où d_g désigne la distance riemannienne associée à la métrique g . Dans ce qui suit ε et K sont fixés, et on fixe également $k \geq N$.

Si le lemme 7.5 n'était pas vérifié, il existerait des points $y'_k \in X$ et $y_k \in K$ tels que $d_g(y_k, y'_k) < \varepsilon$, $\|H_{y'_k}^k - \frac{1}{n}I\| \geq K_3 \cdot \varepsilon$ (où $\frac{n-2}{n\varepsilon} \geq K_3 \geq K_2(K_1 + 1) + 1$).

La continuité de $y \mapsto H_y^k$ donnerait l'existence d'un premier point (noté y''_k) du segment géodésique $[y_k, y'_k]$ tel que $\|H_{y''_k}^k - \frac{1}{n}I\| = K_3 \cdot \varepsilon$, ce qui impliquerait que $\mu_n^k \leq 1 - \frac{1}{n}$ en tout point du segment géodésique $\alpha = [y_k, y''_k]$. En appliquant les lemmes 7.5.a et 7.5.b, nous obtiendrions

$$\|h_{y_k}^k \circ P - h_{y''_k}^k\| \leq K_2(K_1 + 1)\varepsilon.$$

Comme $\|H_{y_k}^k - \frac{1}{n}I\| < \varepsilon$, on aurait une contradiction. $\square$

LEMME 7.6. *Il existe une sous-suite de la suite F_k qui converge uniformément vers une application continue $F : X \rightarrow X$.*

Preuve : D'après le lemme 7.5, pour tout $k \geq N$ et pour tout $y \in X$, $\frac{1}{n} - K_3 \varepsilon \leq \mu_j^k(y) \leq \frac{1}{n} + K_3 \varepsilon$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$. En conséquence d'après le calcul de la différentielle de π fait au chapitre 5 (formule (5.6)) on en déduit que, pour $k \geq N$,

$$\|d\pi\| \leq \frac{2\sqrt{n}}{h_0} + K \cdot \varepsilon$$

et

$$\text{Trace}_g[F_k^* g_0] \leq \frac{4n}{h_0^2} \text{Trace}_g(g_{\Phi_k}) + K' \cdot \varepsilon \leq n + K'' \cdot \varepsilon.$$

On en déduit que la famille $(F_k)_{k \geq N}$ est une famille équicontinue d'applications lipschitziennes. Il existe donc une sous-suite, notée encore F_k , qui converge uniformément vers une application continue $F : X \rightarrow X$; en effet X est compacte et, pour $y \in X$ fixé, $\{F_k(y)\}_{k \geq N}$ est relativement compact. $\square$

3^e ÉTAPE. F est une isométrie de (X, g) sur (X, g_0) . Nous étudions d'abord plus précisément la convergence de la suite F_k afin d'en déduire que F est contractante. Un argument de volume montre ensuite que F est une isométrie locale; on termine en utilisant le degré de F .

La première étape consiste à montrer que la norme de dF_k converge presque sûrement vers 1. Cette norme est calculée à l'aide de la métrique g au départ et g_0 à l'arrivée et définie par

$$\|d_y F_k\|_{g, g_0}(y) = \sup_{\substack{u \in T_y X \\ g(u, u) = 1}} \|d_y F_k(u)\|_{g_0}.$$

LEMME 7.7. *La suite des tenseurs $F_k^* g_0$ est uniformément bornée et converge presque sûrement vers g .*

Preuve : La preuve du lemme 7.6 donne

$$\frac{1}{n} \text{Trace}_g(F_k^* g_0) \leq 1 + K'' \cdot \varepsilon .$$

Par ailleurs, il découle du lemme 7.3 que le déterminant (relativement à g) de $F_k^* g_0$ tend vers 1 presque sûrement. Le lemme 7.7 découle alors du fait que, si une matrice symétrique positive A satisfait, pour ε suffisamment petit,

$$1 - \varepsilon \leq (\det A)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{Trace}(A) \leq 1 + \varepsilon ,$$

alors

$$\|A - (\det A)^{1/n} \cdot I\| \leq K \cdot \varepsilon^{1/2} .$$

Dans le cas présent, ce principe s'applique en presque tout point $y \in X$, il suffit de remplacer A par la matrice de $F_k^* g_0$ dans une base g -orthonormée de $T_y X$. $\square$

LEMME 7.8. *Si F est une limite uniforme d'applications $F_k : (Y, g) \rightarrow (X, g_0)$ telles que $\|d_y F_k\|_{g, g_0}$ soit uniformément bornée et tende vers 1 presque sûrement, alors F est lipschitzienne de constante de Lipschitz inférieure ou égale à 1.*

Preuve : Chaque application dF_k est définie presque partout et de plus $\|dF_k\|$ converge presque partout vers 1, il existe donc un ensemble P de mesure pleine tel que tous les $d_y F_k$ sont définis et $\|d_y F_k\|$ converge simplement vers 1 pour $y \in P$.

Nous allons d'abord démontrer que les F_k sont presque contractantes. L'argument pour le prouver nous a été suggéré par [Se]. Soient donc y_1 et y_2 deux points de Y ; par le théorème de Fubini il existe un point y'_2 arbitrairement proche de y_2 tel que la g -géodésique minimisante γ joignant y_1 à y'_2 intersecte $Y \setminus P$ en un ensemble de mesure de Lebesgue nulle sur γ . Plus précisément, pour presque tout vecteur v de la sphère unitaire $U_y Y$ de $T_y Y$, $\gamma_v^{-1}(Y \setminus P)$ est de mesure de Lebesgue nulle dans l'intervalle $[0, \text{cut}(v)[$, où γ_v désigne la géodésique $t \mapsto \exp_y(tv)$ et où $\text{cut}(v)$ est la première valeur de t après laquelle cette géodésique cesse d'être minimisante. Ceci se déduit du fait que

$$\int_{U_y Y} \text{mes}([0, \text{cut}(v)[\cap \gamma_v^{-1}(Y \setminus P)) \, dv = \text{Vol } \Phi^{-1}(Y \setminus [\text{Cut}(y) \cup P]) = 0 ,$$

où $\Phi(t, v) = \exp_y(tv)$ est un difféomorphisme de $\{(t, v)/t < \text{cut}(v)\}$ sur $Y \setminus \text{Cut}(y)$.

Si $\ell = d_g(y_1, y'_2)$, on obtient

$$d_{g_0}(F_k(y_1), F_k(y'_2)) \leq \int_0^\ell \|d_{\gamma(t)} F_k(\dot{\gamma}(t))\|_{g_0} dt \leq \int_0^\ell \|d_{\gamma(t)} F_k\|_{g, g_0} dt .$$

En presque tout point z de la géodésique γ , $\|dF_k\|_{g, g_0}(z)$ converge vers 1 lorsque k tend vers l'infini et est borné indépendamment de z et de k , donc par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^\ell \|d_{\gamma(t)} F_k\|_{g, g_0} dt \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell = d_g(y_1, y'_2) .$$

En passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, il vient

$$d_{g_0}(F(y_1), F(y'_2)) \leq d_g(y_1, y'_2) .$$

Par densité et continuité de F (par hypothèse), cette inégalité est vraie pour tout couple (y_1, y_2) . $\square$

Les lemmes 7.6 et 7.7 montrent que les hypothèses du lemme 7.8 sont vérifiées, nous obtenons donc le

LEMME 7.9. *L'application F est une isométrie de (X, g) sur (X, g_0) .*

Preuve : L'application F est limite uniforme d'applications de degré 1, elle hérite de la même propriété. Le lemme est donc un cas particulier de la proposition C.1 de l'appendice C dans le cas où $\deg F = 1$.

8. Application entre variétés différentes

Nous allons prouver dans ce chapitre la forme forte du théorème principal. Soient Y et X deux variétés compactes et orientées de dimension $n \geq 3$, on suppose que X possède une métrique localement symétrique de courbure strictement négative g_0 , alors

8.1 THÉORÈME. *S'il existe une application continue*

$$f : Y \longrightarrow X$$

de degré non nul, alors pour toute métrique g sur Y on a l'inégalité

$$(h(g))^n \text{Vol}(Y, g) \geq |\deg f| (h(g_0))^n \text{Vol}(X, g_0) .$$

De plus l'égalité n'est atteinte que si g est localement symétrique de même type que g_0 et si f est homotope à un revêtement localement homothétique de (Y, g) sur (X, g_0) .

Preuve : La preuve consiste à reprendre pas à pas les preuves des chapitres 5 et 7 et à faire les modifications nécessaires.

Une remarque préliminaire est que l'application f peut être régularisée en une application de classe $\mathcal{C}^1$. Par la suite, nous nous placerons dans cette situation, c'est-à-dire f est de classe $\mathcal{C}^1$.

1) L'inégalité. L'application f se relève en une application équivariante de $\tilde{Y}$ sur $\tilde{X}$. Plus précisément, si ρ est le morphisme de $\pi_1(Y)$ sur $\pi_1(X)$ induit par f , alors on peut relever f en une application

$$\tilde{f} : \tilde{Y} \longrightarrow \tilde{X}$$

telle que :

$$\tilde{f}(\gamma y) = \rho(\gamma) \tilde{f}(y)$$

pour tout $\gamma \in \pi_1(Y)$ et tout $y \in \tilde{Y}$. Comme précédemment nous fixons un revêtement universel riemannien $(\tilde{X}, g_0)$ de (X, g_0) et une origine en sorte de l'identifier à la boule unité de $\mathbf{R}^n$ munie de son origine canonique. Ceci induit une mesure canonique sur $\partial \tilde{X} \simeq S^{n-1}$, encore notée $d\theta$.

Nous utilisons des applications équivariantes

$$\Phi : \tilde{Y} \longrightarrow S^\infty \subset L^2(\partial \tilde{X}, d\theta)$$

c'est-à-dire vérifiant

i) $\Phi(y)$ est une fonction positive.

ii) $\Phi(\gamma y) = \rho(\gamma)[\Phi(y)]$ pour tout $\gamma \in \pi_1(Y)$ et $y \in \tilde{Y}$, où l'action de l'élément $\rho(\gamma)$ de $\pi_1(X)$ sur un élément de $L^2(\partial \tilde{X}, d\theta)$ a été définie en 2.1.

Comme dans la section 2 nous pouvons les considérer comme des applications de deux variables $\Phi(y, \theta)$, où $y \in \tilde{Y}$ et $\theta \in \partial \tilde{X}$. Nous n'avons besoin que des exemples suivants :

i) $\Phi_0(y, \theta) = \sqrt{p_0}(\tilde{f}(y), \theta)$ où p_0 est le noyau de Poisson de $(\tilde{X}, g_0)$.

Si π désigne l'opération barycentre du chapitre 5 (opérant toujours de $L^2(\partial \tilde{X})$ sur $\tilde{X}$ et toujours associée à la métrique g_0 sur $\tilde{X}$) alors

$$\pi \circ \Phi_0(y) = \text{bar}(\Phi_0^2(y, \theta) d\theta) = \tilde{f}(y) ,$$

donc $\pi \circ \Phi_0$ passe au quotient en une application de degré $\deg(f)$ de Y dans X , et en particulier, si ω_0 est la forme volume hyperbolique de X ,

$$\int_Y (\pi \circ \Phi_0)^*(\omega_0) = (\deg f) \int_X \omega_0 = (\deg f) \text{Vol}(X, g_0) .$$

ii) Pour une métrique quelconque g sur Y , on considère également les applications

$$\Phi_c(y, \theta) = \frac{(\int_{\tilde{Y}} e^{-cd(y,z)} p_0(\tilde{f}(z), \theta) dv_g(z))^{1/2}}{(\int_{\tilde{Y}} e^{-cd(y,z)} dv_g(z))^{1/2}} .$$

où d est la distance induite sur $\tilde{Y}$ par la métrique relevée de g , que nous noterons encore g . Ces fonctions ne sont définies que pour $c > h(g)$. Comme dans la section 2, pour tout $y \in \tilde{Y}$, nous avons

$$\text{Trace}_g(g\Phi_c)(y) \leq \frac{c^2}{4}$$

d'où l'on déduit l'inégalité

$$\inf \{ \text{Vol}(Y, g\Phi_c) \mid c > h(g) \} \leq \left(\frac{h^2(g)}{4n} \right)^{n/2} \text{Vol}(Y, g) .$$

En posant $F_c = \pi \circ \Phi_c$, on construit alors une famille d'applications lipschitziennes ρ -équivariantes

$$F_c : \tilde{Y} \longrightarrow \tilde{X}$$

homotopes à $\pi \circ \Phi_0 = \tilde{f}$ (cf. la remarque 4.4), donc telles que

$$\int_Y F_c^*(\omega_0) = \int_Y f^*(\omega_0) = (\deg f) \text{Vol}(X, g_0) .$$

L'inégalité de calibration de la proposition 5.7 (que nous pouvons utiliser telle quelle puisque l'application barycentre n'a pas changé) et la majoration de la trace (et du déterminant) de $g\Phi_c$ donnée ci-dessus induisent l'inégalité

$$|F_c^*(\omega_0)| = |\Phi_c^*(\pi^*\omega_0)| \leq \left(\frac{c}{h_0} \right)^n |\omega_g|$$

où ω_g est la forme-volume riemannienne associée à la métrique g sur Y . Nous en déduisons

$$|\deg f| \text{Vol}(X, g_0) \leq \int_Y |F_c^*(\omega_0)| \leq \left(\frac{c}{h_0} \right)^n \text{Vol}(Y, g)$$

ce qui prouve l'inégalité.

2) Le cas d'égalité.

8.2 PROPOSITION. Soient Y et X deux variétés compactes et orientées de dimension ≥ 3 . Si $f : Y \rightarrow X$ est une application continue de degré non nul, g_0 une métrique localement symétrique de courbure strictement négative sur X et g une métrique sur Y vérifiant

$$\text{Vol}(Y, g) = |\deg f| \text{Vol}(X, g_0) \quad \text{et} \quad h(g) = h(g_0) .$$

Alors il existe un revêtement riemannien (i.e. localement isométrique) de (Y, g) sur (X, g_0) homotope à f (donc de même degré).

Preuve : Elle est rigoureusement analogue à la preuve de la proposition 7.1. C'est la variété Y qui porte la métrique g .

a) Le lemme 7.2 s'étend à ce cas sans changement. Pour tout $y \in \tilde{Y}$

$$|\text{Jac}(F_c)(y)| \leq 1 + \varepsilon(c) \quad \text{où} \quad \varepsilon(c) \xrightarrow{c \rightarrow h_0} 0.$$

En effet, la preuve du lemme 7.2 s'appuie sur l'inégalité de calibration pour la forme $\pi^*\omega_0$ (proposition 5.7) et sur la majoration de $\text{Trace}_g(g\Phi_c)$ par $c^2/4$. Ces deux arguments sont encore valables dans le cas présent.

b) Les applications F_c étant homotopes à f , elles sont de même degré et donc

$$|\deg(f)| \text{Vol}(X, g_0) \leq \int_Y |\text{Jac } F_c(y)| dv_g.$$

En définissant $|\text{Jac } F_c| = 1 + f_c^+ - f_c^-$ nous poursuivons comme précédemment et nous obtenons le lemme 7.3 dans ce cadre, à savoir que $|\text{Jac } F_{c_k}(y)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$ presque sûrement sur Y . De même, la validité de la proposition B.5 de l'appendice B ne dépendant que de la géométrie de $(\tilde{X}, g_0)$, la preuve du lemme 7.4 montre que $H_y^{c_k}$ tend vers $\frac{1}{n}I$ pour presque tout $y \in Y$.

c) Le lemme 7.5 reste valable dans ce nouveau cadre. En effet, l'application π est ici la même qu'au paragraphe 7, puisqu'elle ne dépend que de (X, g_0) . La validité des lemmes 7.5.a et 7.5.b est donc préservée. Il apparaît clairement dans la preuve du lemme 7.5 que celle-ci ne dépend de (Y, g) qu'à travers la borne supérieure de $\text{Trace}_g(g\Phi_{c_k})$ qui est, ici encore, majorée par $c_k^2/4$. Nous en déduisons, par les formules (5.3) et (5.6), que $d(\pi \circ \Phi_{c_k})$ est bornée indépendamment de k . L'équicontinuité implique la convergence de $\pi \circ \Phi_{c_k}$ vers une application lipschitzienne $F : (Y, g) \rightarrow (X, g_0)$.

d) Le lemme 7.7 reste également valable si $Y \neq X$. Sa preuve se reproduit à l'identique, puisqu'elle consiste à remarquer que ce qui précède implique que, sur un ensemble de mesure pleine dans Y ,

$$\|d\Phi_{c_k}(y)\pi\| \leq \frac{2\sqrt{n}}{(n+d-2)}(1 + \varepsilon_k(y)).$$

Ceci et la majoration de la trace de $g\Phi_k$ permettent de prouver, comme dans le lemme 7.7,

$$1 - \varepsilon_k(y) \leq \frac{(\frac{1}{n}) \text{Trace}(F_k^* g_0)(y)}{|\text{Jac } F_k(y)|^{2/n}} \leq 1 + \varepsilon_k(y),$$

ce qui prouve que $F_k^* g_0$ converge presque sûrement vers g et achève la preuve du lemme 7.7 dans ce cas.

Enfin, le lemme 7.8 est évidemment toujours valable ici. Nous obtenons ainsi une suite d'applications F_{c_k} qui convergent uniformément vers une application lipschitzienne contractante $F : Y \rightarrow X$, homotope à f , donc de

même degré. La fin de la preuve est obtenue en appliquant la proposition C.1 de l'appendice C. $\square$

9. Applications

Dans ce chapitre, nous tirons les conséquences du théorème 8.1, qui joue un rôle central et constitue le lien entre la géométrie riemannienne et l'étude dynamique du flot géodésique. Les conséquences sont donc de deux natures.

A. Applications de nature riemannienne. La principale conséquence riemannienne est le résultat suivant, conjecturé dans [Gr1], p. 221, et [Gr2], p. 58. Dans ce qui suit g_0 désigne une *métrique hyperbolique réelle (à courbure constante égale à -1)* sur une variété compacte orientée X . Les variétés considérées sont de dimension supérieure ou égale à 3.

9.1 THÉOREME. *Soit Y une variété compacte orientée et $f : Y \rightarrow X$ une application continue de degré non nul (resp. de degré 1) alors, pour toute métrique g sur Y , on a*

$$\text{Ricci}(g) \geq -(n-1)g \implies \text{Vol}(Y, g) \geq |\deg f| \text{Vol}(X, g_0) .$$

De plus, l'égalité est atteinte si et seulement si g est hyperbolique réelle et f est homotope à un revêtement riemannien (resp. une isométrie).

Preuve : Le théorème de comparaison de Bishop (voir [GHuLa], p. 144) montre que

$$\text{Ricci}(g) \geq -(n-1)g \implies h(g) \leq (n-1) = h(g_0) .$$

Le théorème 9.1 se déduit donc simplement du théorème 8.1. $\square$

Dans [Gr1], M. Gromov introduit un invariant important, le volume minimal d'une variété. Précisément, si $K(g)$ désigne la courbure sectionnelle d'une métrique g , alors

$$\min \text{Vol}(Y) = \inf \{ \text{Vol}(Y, g) \mid g \text{ telle que } |K(g)| \leq 1 \} .$$

On a le

9.2 COROLLAIRE. *Sous les hypothèses du théorème 9.1,*

$$\min \text{Vol}(Y) \geq |\deg f| \text{Vol}(X, g_0) \text{ et } \min \text{Vol}(X) = \text{Vol}(X, g_0) .$$

Dans le cas des autres espaces localement symétriques (X, g_0) de courbure strictement négative, on a $\text{Ricci}(g_0) = -\left(\frac{n+3d-4}{4}\right)g_0$, où g_0 est normalisée pour que sa courbure sectionnelle K_{g_0} vérifie $-1 \leq K_{g_0} \leq -\frac{1}{4}$. Si $f : Y \rightarrow X$ est une application continue et g une métrique sur Y , on a, d'après l'inégalité de Bishop

$$\text{Ricci}(g) \geq -\left(\frac{n+3d-4}{4}\right)g \quad (9.3)$$

$$\Rightarrow \text{Vol}(Y, g) \geq |\deg f| \left[\frac{(n+d-2)^2}{(n-1)(n+3d-4)} \right]^{n/2} \text{Vol}(X, g_0).$$

On voit que, sous les mêmes hypothèses,

$$\min \text{Vol}(Y) \geq |\deg f| \left[\frac{(n+d-2)^2}{(n-1)(n+3d-4)} \right]^{n/2} \text{Vol}(X, g_0) \quad (9.4)$$

Lorsque (X, g_0) est localement symétrique non hyperbolique réelle, $\left[\frac{(n+d-2)^2}{(n-1)(n+3d-4)} \right]^{n/2}$ est strictement inférieur à 1 et les inégalités (9.3) et (9.4) ne sont pas optimales. En particulier, dans ce cas, le problème P.1 du volume minimal reste ouvert.

9.5 Remarque : Le théorème 9.1 montre que, sur une variété hyperbolique réelle, le plus petit volume des métriques g satisfaisant à l'hypothèse $\text{Ricci}(g) \geq -(n-1)g$ est celui de la métrique hyperbolique réelle g_0 et que c'est la seule à le réaliser. Dans le cas où une variété Y se surjecte sur X par une application de degré p non nul, alors cette valeur minimale est $|p| \text{Vol}(X, g_0)$ et elle ne peut être atteinte que par une métrique hyperbolique réelle et si f peut se déformer en un revêtement riemannien.

Dans [GrT], M. Gromov et W. Thurston exhibent des variétés Y de dimension supérieure ou égale à 4 qui admettent des métriques à courbure sectionnelle arbitrairement proche de la constante -1 mais aucune métrique à courbure constante -1. Elles sont de plus des revêtements branchés sur des variétés hyperboliques X . Le théorème 9.1 montre alors que, sur l'ensemble des métriques g sur Y satisfaisant à la condition $\text{Ricci}(g) \geq -(n-1)g$, la fonctionnelle $g \mapsto \text{Vol}(Y, g)$ est minorée par $p \cdot \text{Vol}(X, g_0)$, où p est l'ordre du revêtement.

Le théorème 9.1 admet un autre corollaire important en dimension 4.

9.6 THÉORÈME. Soit X une variété compacte de dimension 4 admettant une métrique hyperbolique réelle g_0 alors c'est la seule métrique d'Einstein sur X à homothétie près.

Preuve : En dimension 4, la caractéristique d'Euler d'une variété X se calcule en fonction du tenseur de courbure de n'importe quelle métrique g par la formule (voir [Bes2], p. 161)

$$\chi(X) = \frac{1}{8\pi^2} \int_X (\|W_g\|^2 - \|Z_g\|^2 + \|U_g\|^2) dv_g$$

où W_g désigne le tenseur de Weyl de g , $\|Z_g\|$ est égal à $C_1 \cdot \|\text{Ricci}(g) - \frac{\text{scal}(g)}{n}g\|$ et $\|U_g\| = C \text{scal}(g)$, où les constantes C_1 et C sont universelles.

Alors, si g est une autre métrique d'Einstein, sa courbure scalaire est strictement négative, en effet si $\text{Ricci}(g) \geq 0$ alors $\pi_1(X)$ a une croissance au plus polynomiale et X ne peut donc supporter de métriques à courbure sectionnelle strictement négative.

On peut donc, quitte à renormaliser g , supposer que $\text{Ricci}(g) = -(n-1)g$, d'où

$$\begin{aligned}\chi(X) &\geq \frac{1}{8\pi^2} \int_X \|U_g\|^2 dv_g = \frac{C^2}{8\pi^2} n^2 (n-1)^2 \text{Vol}(X, g) \\ &\geq \frac{C^2}{8\pi^2} n^2 (n-1)^2 \text{Vol}(X, g_0) = \frac{1}{8\pi^2} \int_X \|U_{g_0}\|^2 = \chi(X) .\end{aligned}$$

On utilise ici le fait que Z_g et Z_{g_0} sont nuls car g et g_0 sont des métriques d'Einstein et que $W_{g_0} \equiv 0$ car g_0 est localement conformément plate. La seconde inégalité provient du théorème 9.1. L'égalité des extrêmes montre que nous sommes dans le cas d'égalité du théorème 9.1 et donc que g est isométrique à g_0 (ici $Y = X$ et $f = \text{id}$).

Une autre application riemannienne est une nouvelle preuve *unifiée* du théorème de rigidité de G.D. Mostow ([Mos]) ainsi que des généralisations de ce théorème dues à K. Corlette, Y.-T. Siu et W. Thurston ([C], [Si], [T]).

9.7 THÉORÈME (G.D. Mostow). *Soient (Y, g_1) et (X, g_0) deux variétés compactes localement symétriques de courbure strictement négative de dimension $n \geq 3$. On suppose que Y et X sont homotopiquement équivalentes. Alors (Y, g_1) et (X, g_0) sont homothétiques.*

Preuve : Quitte à remplacer g_1 par λg_1 on peut supposer $\text{Vol}(X, g_0) = \text{Vol}(Y, g_1)$. Soit $f : Y \rightarrow X$ et $h : X \rightarrow Y$ une équivalence d'homotopie entre X et Y , les applications continues f et h sont de degré 1. Le théorème 8.1 appliqué deux fois entraîne :

$$h^n(g_1) \text{Vol}(Y, g_1) = h^n(g_0) \text{Vol}(X, g_0) . \quad (9.8)$$

Comme les volumes sont égaux, on déduit $h(g_1) = h(g_0)$ et nous sommes dans le cas d'égalité du théorème 8.1, donc (Y, g_1) et (X, g_0) sont isométriques par une isométrie homotope à f . $\square$

9.9 THÉORÈME (K. Corlette, Y.T. Siu, W. Thurston). *Soient (X, g_0) et (Y, g_1) deux variétés compactes hyperboliques réelles (resp. complexes, quaternionniennes ou de Cayley) de dimension $n \geq 3$. Soit $f : Y \rightarrow X$ une application de degré $p \neq 0$. Alors, si $\text{Vol}(Y, g_1) = |p| \text{Vol}(X, g_0)$, f est homotope à un revêtement isométrique.*

Rappelons que les métriques hyperboliques réelles (resp. complexes, quaternionniennes ou de Cayley) sont normalisées de sorte que leurs courbures sectionnelles soient égales à -1 (respectivement comprises entre -4 et -1).

Preuve : C'est une conséquence directe du cas d'égalité du théorème 8.1. $\square$

Ce théorème a été prouvé par W. Thurston [T] dans le cas hyperbolique réel; Y.T. Siu [Si] (cas hyperbolique complexe) et K. Corlette [C] (cas hyperbolique quaternionnien et de Cayley) l'obtiennent comme corollaire d'autres résultats.

Dans le cas hyperbolique réel, la preuve de W. Thurston est dans le même esprit que celle qu'il donne du théorème de rigidité de G.D. Mostow. Dans les cas hyperboliques complexe, quaternionnien, et de Cayley, les preuves de Y.T. Siu et K. Corlette utilisent la méthode des applications harmoniques.

On remarquera que notre méthode donne une construction de l'isométrie (voir les chapitres 7 et 8).

9.10 Remarques : i) L'hypothèse sur les volumes est nécessaire dans cette version des théorèmes de rigidité. En effet, étant donnée une variété hyperbolique (X, g_0) , compacte de dimension 3, on peut construire une infinité de variétés hyperboliques qui admettent une application de degré 1 sur X . Elles ont, bien entendu, un volume différent de celui de (X, g_0) . Ces constructions sont faites par chirurgie de Dehn sur certains nœuds dans X dont le complémentaire est hyperbolique (voir [BoW], section 4).

ii) Ces exemples montrent au passage que, dans le théorème de rigidité de Mostow, le fait d'avoir une équivalence d'homotopie est aussi fondamental.

Enfin, une autre application est l'inégalité isopérimétrique suivante :

9.11 PROPOSITION. Soient Y et X deux variétés compactes et orientées, de dimension $n \geq 2$ reliées par une application $f : Y \rightarrow X$ de degré non nul. Supposons que X admet une métrique localement symétrique g_0 de courbure négative et considérons une métrique g quelconque sur Y . Notons respectivement $\tilde{B}_g(y, R)$ et $\tilde{B}_{g_0}(x, R)$ les boules-géodésiques de rayon R dans les revêtements universels riemanniens de (Y, g) et (X, g_0) . Pour tous les $x \in X$ et tous les $y \in Y$, on a alors

$$\begin{aligned} \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}_g(\partial \tilde{B}_g(y, R))^n}{\text{Vol}_g(\tilde{B}_g(y, R))^n \cdot \text{Vol}(Y, g)^{-1}} \\ \geq |\deg(f)| \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}_{g_0}(\partial \tilde{B}_{g_0}(x, R))^n}{\text{Vol}_{g_0}(\tilde{B}_{g_0}(x, R))^n \cdot \text{Vol}(X, g_0)^{-1}}. \end{aligned}$$

De plus, si $n \geq 3$, il y a égalité si et seulement s'il existe un revêtement localement homothétique de (Y, g) sur (X, g_0) homotope à f .

Remarque : Lorsque g est de courbure négative, la limite supérieure du membre de gauche de l'inégalité isopérimétrique ci-dessus est une limite au sens usuel.

Preuve : La définition même de l'entropie (voir le chapitre 1) donne, sur toute variété (Y, g) et pour tout R_0 ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{R - R_0} \int_{R_0}^R \frac{\text{Vol } \partial B_g(y, r)}{\text{Vol } B_g(y, r)} dr \right] = h(Y, g) .$$

L'inégalité se déduit alors du théorème 8.1. Le cas d'égalité se déduit du cas d'égalité dans le théorème 8.1. $\square$

B. Applications de nature dynamique. Soient (Y, g) et (X, g_0) deux variétés riemanniennes compactes de dimension n . Soient $U_g Y$ et $U_{g_0} X$ les fibrés unitaires correspondants et $\xi_t^g, \xi_t^{g_0}$ les flots géodésiques respectivement associés à g (sur Y) et à g_0 (sur X). On dit que ξ_t^g et $\xi_t^{g_0}$ sont C^k -conjugués s'il existe un difféomorphisme de classe C^k , $\Psi : U_g Y \rightarrow U_{g_0} X$ tel que $\Psi \circ \xi_t^g = \xi_t^{g_0} \circ \Psi$.

Le théorème suivant exprime qu'une variété compacte localement symétrique de courbure strictement négative et de dimension supérieure ou égale à trois est caractérisée par la C^1 -classe de conjugaison de son flot géodésique :

9.12 THÉORÈME. *Soit (Y, g) et (X, g_0) deux variétés riemanniennes compactes de dimension $n \geq 3$. On suppose que g_0 est localement symétrique de courbure strictement négative. Si les flots géodésiques de g et g_0 sont C^1 -conjugués, g est isométrique à g_0 .*

Preuve : La C^0 -conjugaison des flots entraîne l'égalité des entropies topologiques, c'est-à-dire $h_{\text{top}}(g) = h_{\text{top}}(g_0)$. Par ailleurs, C. Croke et B. Kleiner (voir [CrKl]) ainsi que P. Foulon ([Fo]) montrent que la C^1 -conjugaison des flots entraîne l'égalité $\text{Vol}(X, g_0) = \text{Vol}(Y, g)$.

L'homéomorphisme Ψ entre $U_g Y$ et $U_{g_0} X$ implique que $\pi_1(X)$ est isomorphe à $\pi_1(Y)$; en effet, $\pi_1(U_g Y) \simeq \pi_1(Y)$ et $\pi_1(U_{g_0} X) \simeq \pi_1(X)$ car $n \geq 3$. Enfin, X est un $K(\pi, 1)$ (car X porte une métrique de courbure négative) et Y également car $U_g Y$ est homéomorphe à $U_{g_0} X$ (voir Appendice D). Il existe donc une équivalence d'homotopie entre Y et X que l'on peut donc régulariser en une application C^1 de degré 1, $f : Y \rightarrow X$. Alors, en utilisant le théorème de Dinaburg et Manning énoncé en introduction et le théorème 8.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} (h_{\text{top}}(g))^n \text{Vol}(Y, g) &\geq (h(g))^n \text{Vol}(Y, g) \geq (h(g_0))^n \text{Vol}(X, g_0) \\ &= (h_{\text{top}}(g_0))^n \text{Vol}(X, g_0) . \end{aligned}$$

Des égalités précédentes il vient que (Y, g) et (X, g_0) vérifient l'égalité dans l'inégalité du théorème 8.1 et donc que (Y, g) est isométrique à (X, g_0) . $\square$

Dans le théorème 9.12, aucune hypothèse n'est faite sur le signe de la courbure de g . Nous allons maintenant supposer la courbure de g

strictement négative. On rappelle que, si g est une métrique de courbure strictement négative sur une variété compacte Y , dans chaque classe d'homotopie libre α il y a une unique géodésique périodique dont la longueur est notée $\ell_g(\alpha)$. On construit ainsi une application :

$$\begin{array}{ccc} \ell_g : \{ \text{classes d'homotopie libre} \} & \longrightarrow & \mathbf{R}^+ \\ \alpha & \longmapsto & \ell_g(\alpha) \end{array}$$

que l'on appelle spectre marqué des longueurs. Nous dirons que deux variétés riemanniennes (X, g_1) et (Y, g_2) ont même spectre marqué des longueurs s'il existe un isomorphisme ρ de $\pi_1(Y)$ sur $\pi_1(X)$ tel que :

$$\ell_{g_1} \circ \rho = \ell_{g_2} .$$

9.13 Remarque : Dans le cas où g_0 est hyperbolique réelle et g_1 est de courbure strictement négative nous pouvons utiliser un résultat de U. Hamenstädt ([H2]) qui montre que la $\mathcal{C}^0$ -conjugaison des flots entraîne l'égalité des volumes. En particulier, nous obtenons le

9.14 THÉORÈME. Soit (Y, g_1) et (X, g_0) deux variétés riemanniennes compactes de dimension ≥ 3 . On suppose que g_1 est de courbure strictement négative et que g_0 est hyperbolique réelle (de courbure constante égale à -1). Alors si (Y, g_1) a même spectre marqué des longueurs que (X, g_0) , g_1 est isométrique à g_0 .

Preuve : Dans [H1] il est prouvé que l'identité des spectres marqués implique la $\mathcal{C}^0$ -conjugaison des flots géodésiques correspondants. Le théorème découle alors de la preuve du théorème 9.12 et de la remarque 9.13. $\square$

Rappelons quelques définitions : soient X une variété compacte de dimension $n \geq 2$, Z un champ de vecteurs lisse sur X et ξ_t le flot associé à Z .

Le flot ξ_t est un flot d'Anosov s'il existe une décomposition du fibré tangent TX de X qui est invariante par le flot : $TX = \mathbf{R}Z \oplus E^{ss} \oplus E^{su}$, et des constantes a et b strictement positives telles que

$$\forall V \in E^{ss}, \forall t \geq 0, \quad \|d\varphi_t(V)\| \leq a\|V\|e^{-bt} \quad (9.15)$$

$$\forall V \in E^{su}, \forall t \geq 0, \quad \|d\varphi_{-t}(V)\| \leq a\|V\|e^{-bt} \quad (9.16)$$

où $\| \cdot \|$ est une métrique riemannienne sur X . Le fait que ξ_t soit un flot d'Anosov ne dépend pas du choix de la métrique $\| \cdot \|$.

Par exemple, les flots géodésiques des variétés compactes de courbure strictement négative sont des flots d'Anosov. On appelle $E^{ss}, E^{su}, E^s = E^{ss} \oplus \mathbf{R}Z, E^u = E^{su} \oplus \mathbf{R}Z$ les distributions respectivement stable, instable, centrale stable, centrale instable.

Dans [BenFoL], Y. Benoist, P. Foulon et F. Labourie ont montré que les flots géodésiques des variétés compactes localement symétriques de courbure strictement négative sont caractérisés, parmi les flots géodésiques des variétés compactes de courbure strictement négative, par la régularité de la distribution centrale stable (ou centrale instable).

Avec le théorème 9.12, nous obtenons

9.17 COROLLAIRE. *Soit (X, g) une variété compacte de dimension $n \geq 3$ et de courbure strictement négative; si la distribution centrale stable de (X, g) est C^∞ , alors (X, g) est isométrique à une variété localement symétrique de courbure strictement négative.*

Preuve : Le théorème de Y. Benoist, P. Foulon et F. Labourie (cf. [BenFoL]) entraîne que le flot géodésique de (X, g) est C^∞ -conjugué à celui d'une variété localement symétrique de courbure strictement négative et le théorème 9.12 entraîne alors que ces deux variétés sont isométriques. $\square$

C. Application à la conjecture de Lichnerowicz. Une variété harmonique est une variété riemannienne dont les sphères géodésiques sont de courbure moyenne constante ([Bes1], [Li]). Après avoir montré qu'une variété harmonique de dimension inférieure ou égale à 4 est un espace symétrique, A. Lichnerowicz conjecture qu'il en est ainsi en toute dimension. Récemment, Z. Szabo a prouvé qu'une variété harmonique compacte dont le groupe fondamental est fini est un espace symétrique de rang 1 ([Sz]). Une variété harmonique non compacte est sans point conjugué, et son revêtement universel est difféomorphe à $\mathbf{R}^n$ (cf. [Bes1], p. 171). Une variété riemannienne de courbure négative est asymptotiquement harmonique si la courbure moyenne des horosphères de son revêtement universel est constante (cf. [BaGrS] pour la définition des horosphères). Une variété harmonique non compacte est donc asymptotiquement harmonique.

P. Foulon et F. Labourie ont montré qu'une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative et asymptotiquement harmonique a son flot géodésique C^∞ -conjugué à celui d'une variété compacte localement symétrique de courbure strictement négative (cf. [FoL]).

E. Damek et F. Ricci ont donné des exemples de variétés homogènes simplement connexes harmoniques de courbure négative qui ne sont pas symétriques ([DRi]). Ces contre-exemples n'admettent pas de quotient riemannien compact. Il reste donc à savoir si une variété harmonique simplement connexe de courbure strictement négative, qui admet une variété-quotient compacte est automatiquement un espace symétrique de rang 1. Remarquons que les variétés-quotients ainsi obtenues sont automatiquement asymptotiquement harmoniques. Nous terminons la résolution de ce problème en prouvant le

9.18 COROLLAIRE. *Soit (Y, g) une variété compacte de courbure strictement négative asymptotiquement harmonique de dimension ≥ 3 . Alors (Y, g) est isométrique à une variété localement symétrique de courbure strictement négative.*

Preuve : Le théorème de P. Foulon et F. Labourie (cf. [FoL]) montre que le flot géodésique de (Y, g) est C^∞ -conjugué à celui d'une variété localement symétrique de courbure strictement négative. Le théorème 9.12 permet alors de conclure. $\square$

Dans [Led1], F. Ledrappier montre qu'une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative, telle que les mesures de Bowen-Margulis et harmonique (définies sur le fibré unitaire) sont proportionnelles, est asymptotiquement harmonique. Le théorème 9.18 implique alors le corollaire suivant :

9.19 THÉORÈME. *Soit (X, g) une variété riemannienne compacte orientable telle que la mesure de Bowen-Margulis et la mesure harmonique associées à g sont proportionnelles, alors (X, g) est localement symétrique.*

D. Quelques problèmes ouverts concernant l'isospectralité. Soient (Y, g) et (X, g_0) deux variétés riemanniennes compactes de dimension au moins 3 et de courbure strictement négative. Nous supposons que g_0 est localement symétrique. Nous dirons que ces deux variétés sont isospectrales si leurs laplaciens ont même spectre (i.e. l'ensemble des valeurs propres du laplacien de (Y, g) coïncide avec l'ensemble des valeurs propres du laplacien de (X, g_0)). Nous nous intéressons au problème suivant :

9.20 CONJECTURE . *Si (Y, g) et (X, g_0) sont isospectrales et s'il existe une application de degré non nul de Y sur X , alors (Y, g) et (X, g_0) sont isométriques.*

Deux variétés isospectrales ayant même volume (voir par exemple [BerGaMaz], p. 216), le théorème 8.1 implique que la conjecture 9.20 découle de la seconde conjecture suivante :

9.21 CONJECTURE. *En courbure strictement négative, la donnée du spectre du laplacien détermine l'entropie volumique.*

TENTATIVE DE PREUVE. Un résultat de Y. Colin de Verdière ([CdV]) montre que le spectre du laplacien donne le spectre non marqué des longueurs, i.e. l'ensemble de toutes les longueurs des géodésiques périodiques, que nous noterons Spec Long. Par ailleurs, un résultat de G.A. Margulis ([Ma]) prouve que l'entropie volumique (qui, en courbure strictement négative,

coïncide avec l'entropie topologique, voir le chapitre 1) peut être définie comme l'infimum des c tels que

$$(9.22) \quad \sum_{\ell \in \text{Spec Long}} m(\ell) e^{-c\ell} < +\infty ,$$

où $m(\ell)$ est la multiplicité de la valeur $\ell \in \text{Spec Long}$ (i.e. le nombre de géodésiques périodiques de longueur ℓ). Pour une métrique g générique, la multiplicité de chaque longueur de Spec Long est égale à 1 et la conjecture 9.21 est vraie.

La conjecture 9.21 reste vraie si la multiplicité croît sous-exponentiellement en fonction de la longueur, i.e. si $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\ell} \text{Log } m(\ell) \right] = 0$. En effet, d'après (9.22), l'entropie est alors l'infimum des c tels que $\sum_{\ell \in \text{Spec Long}} e^{-c\ell} < +\infty$; elle est donc donnée par le spectre des longueurs non marqué, lui-même donné par le spectre du laplacien. Malheureusement, il est probablement faux que, dans le cas localement symétrique, la multiplicité croisse toujours sous-exponentiellement. $\square$

Pour une variété riemannienne quelconque (Y, g) , notons $h'(Y, g)$ l'infimum des c tels que $\sum_{\ell \in \text{Spec Long}} e^{-c\ell} < +\infty$. La quantité $h(Y, g) - h'(Y, g)$ est positive ou nulle et mesure le taux moyen de croissance exponentielle de la multiplicité des longueurs. Si (Y, g) était isospectrale et non isométrique à (X, g_0) et s'il existait une application de degré non nul de Y sur X , le théorème 8.1 donnerait

$$h(Y, g) - h'(Y, g) > h(X, g_0) - h'(X, g_0) ,$$

ce qui impliquerait qu'il y a beaucoup plus de grandes géodésiques de longueurs égales sur (Y, g) que sur (X, g_0) . Une conjecture raisonnable est de prouver que c'est en fait le contraire qui a lieu, en raison des symétries de la métrique g_0 .

Appendice A

Nous donnons ici une preuve de l'existence et de l'unicité du barycentre inspirée de la remarque 4 page 27 de [DoE]. Nous nous plaçons dans un cadre plus général : X est une variété compacte de courbure strictement négative et $\tilde{X}$ est son revêtement universel, enfin μ désigne une mesure de probabilité (positive) sans atome sur $\partial\tilde{X}$.

A.1 PROPOSITION. *Si μ ne possède aucun atome, l'équation vectorielle*

$$\int_{\partial\tilde{X}} dB_{(x,\theta)} d\mu(\theta) = 0$$

définit un unique point $x \in \tilde{X}$ appelé le barycentre de μ et noté $\text{bar}(\mu)$.

Preuve : Nous recherchons les points critiques de la fonction

$$\mathcal{B}(x) = \int_{\partial \tilde{X}} B(x, \theta) d\mu(\theta) .$$

1) EXISTENCE D'UN MINIMUM. Nous allons montrer que $\mathcal{B}$ admet un minimum dans $\tilde{X}$. Pour faire cela il suffit de prouver que $\mathcal{B}(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend radialement vers un point $\theta_0 \in \partial \tilde{X}$, c'est-à-dire le long de la demi-géodésique $o\theta_0$ (on rappelle que $\tilde{X}$ est muni d'une origine o).

En effet, la métrique de $\tilde{X}$ provenant de celle d'une variété compacte de courbure strictement négative, la fonction $x \mapsto B(x, \theta)$ est convexe le long des géodésiques ([BaGrS], p. 24). Par conséquent, pour tout $c > 0$, chaque point du bord de l'ensemble convexe $A_c = \{x \mid B(x) \leq c\}$ peut-être joint à o par un rayon entièrement inclus dans A_c , donc le fait que la limite radiale de $\mathcal{B}$ soit $+\infty$ suffit à assurer l'existence du minimum. Pour tout x et x_0 sur la demi-géodésique $o\theta_0$ et pour tout $\theta \in \partial \tilde{X}$, on a, si x est situé entre x_0 et θ_0

$$d(x_0, o)B(x, \theta) \geq d(x, o)B(x_0, \theta) \quad (*)$$

où d désigne la distance riemannienne dans $\tilde{X}$. On rappelle que B est normalisée en sorte que $B(o, \theta) \equiv 0$ pour tout $\theta \in \partial \tilde{X}$.

Pour $x \in o\theta_0$ soit $J_{\theta_0}(x) = \{\theta \in \partial \tilde{X} \mid B(x, \theta) \leq 0\}$. La fonction $B(x, \theta)$ est continue en θ et donc, pour tout x , $J_{\theta_0}(x)$ est un compact de $\partial \tilde{X}$. L'inégalité (*) implique que $J_{\theta_0}(x) \subset J_{\theta_0}(x_0)$ si x est situé entre x_0 et θ_0 sur la géodésique $o\theta_0$. En fait $\bigcap_{x \in o\theta_0} J_{\theta_0}(x) = \{\theta_0\}$, en effet si $\theta \neq \theta_0$, $B(x, \theta) \xrightarrow{x \rightarrow \theta_0} +\infty$.

En conséquence, $\mu(J_{\theta_0}(x))$ tend en décroissant vers $\mu(\{\theta_0\})$, qui est nul par hypothèse, lorsque x tend vers θ_0 le long de la demi-géodésique $o\theta_0$ (de o vers θ_0). En particulier on peut choisir $x_0 \in o\theta_0$ tel que $\mu(J_{\theta_0}(x_0)) < 1$ et donc un compact K de $\partial \tilde{X} \setminus J_{\theta_0}(x_0)$ tel que $\mu(K) > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\partial \tilde{X}} B(x, \theta) d\mu(\theta) &= \int_{J_{\theta_0}(x)} B(x, \theta) d\mu(\theta) + \int_{\partial \tilde{X} \setminus J_{\theta_0}(x)} B(x, \theta) d\mu(\theta) \\ &\geq \int_{J_{\theta_0}(x)} B(x, \theta) d\mu(\theta) + \int_K B(x, \theta) d\mu(\theta) \end{aligned}$$

si x est entre x_0 et θ_0 . Pour $\theta \in K$, on a

$$B(x_0, \theta) \geq C > 0$$

et donc, en utilisant l'inégalité (*),

$$\int_{\partial \tilde{X}} B(x, \theta) d\mu(\theta) \geq C \frac{d(x, o)}{d(x_0, o)} \mu(K) + \frac{d(x, o)}{d(x_0, o)} \int_{J_{\theta_0}(x)} B(x_0, \theta) d\mu(\theta) .$$

Enfin on a,

$$B(x_0, \theta) \geq -\sup \{ |B(x_0, \theta)| \mid \theta \in \partial \tilde{X} \} = -D, \quad (D \geq 0).$$

En résumé nous obtenons

$$\int_{\partial \tilde{X}} B(x, \theta) d\mu(\theta) \geq \frac{d(x, o)}{d(x_0, o)} (C\mu(K) - D\mu(J_{\theta_0}(x)))$$

et, lorsque x tend vers θ_0 le long de $o\theta_0$, $\mu(J_{\theta_0}(x))$ tend vers zéro, donc

$$\mathcal{B}(x) = \int_{\partial \tilde{X}} B(x, \theta) d\mu(\theta) \text{ tend vers } +\infty.$$

2) UNICITÉ DU POINT CRITIQUE. Sous les hypothèses considérées $\mathcal{B}(x)$ est strictement convexe. En effet, si u est un vecteur unitaire tangent en $x \in \tilde{X}$

$$DdB_x(u, u) = \int_{\partial \tilde{X}} DdB_{(x, \theta)}(u, u) d\mu(\theta).$$

La courbure de la métrique étant strictement négative pincée sur $\tilde{X}$ les horosphères ont des courbures principales minorées par un nombre strictement positif; en conséquence, l'horosphère passant par x et centrée en θ a une seconde forme fondamentale qui est définie et positive; or celle-ci est la restriction de $DdB_{(x, \theta)}$ à l'espace tangent à cette horosphère en x . La forme bilinéaire $DdB_{(x, \theta)}$ ne s'annule donc qu'en la direction de la géodésique de x à θ . Soient alors θ_0^+ et θ_0^- les deux extrémités de la géodésique passant par x et tangente à u , on a

$$\begin{aligned} DdB_{(x, \theta)}(u, u) &> 0 \text{ si } \theta \neq \theta_0^+ \text{ et } \theta_0^- \\ DdB_{(x, \theta)}(u, u) &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Comme, par hypothèse, $\mu(\{\theta_0^+\}) = \mu(\{\theta_0^-\}) = 0$ on a

$$DdB_x(u, u) > 0.$$

Appendice B

On se propose dans cet appendice de prouver l'inégalité permettant le calcul de la comasse de $\pi^*(\omega_0)$. Nous utiliserons les notations du chapitre 5. On rappelle que H est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont strictement comprises entre 0 et 1, leur somme valant 1. De plus, nous notons J_k , $k = 1, \dots, d-1$, les endomorphismes orthogonaux, satisfaisant $J_k^2 = -\text{id}$, qui apparaissent dans la définition du corps ou de l'algèbre de base. En fixant une base nous pouvons identifier tous les endomorphismes à des matrices.

B.1 PROPOSITION. Si $n = \dim X \geq 3$, on a

$$\frac{(\det(H))}{(\det(I - H - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H J_k))^2} \leq \left(\frac{n}{(n+d-2)^2} \right)^n = \left(\frac{n}{h_0^2} \right)^n.$$

B.2 LEMME. En restriction aux matrices symétriques définies positives la fonction déterminant est log-concave.

Preuve du lemme B.2 : Soient A et B deux telles matrices. Diagonalisons B dans une base A -orthonormée; alors, si P est la matrice de passage de cette base à la base canonique de $\mathbf{R}^n$, on a

$$A = {}^t P P \quad \text{et} \quad B = {}^t P D P$$

où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i > 0$. On a donc

$$\det(tA + (1-t)B) = (\det P)^2 \prod_{i=1}^n (t + (1-t)\lambda_i)$$

le résultat se déduit alors de la concavité de la fonction logarithme. $\square$

B.3 LEMME. On a l'inégalité

$$\frac{(\det(H))}{(\det(I - H - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H J_k))^2} \leq \frac{(n-1)^{\frac{2n(n-1)}{n+d-2}}}{(n+d-2)^{2n}} \cdot \frac{\det(H)^{\frac{n-d}{n+d-2}}}{\det(I - H)^{\frac{2(n-1)}{n+d-2}}}.$$

Preuve du lemme B.3 : Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} I - H - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H J_k &= \frac{n+d-2}{n+d-2} \left[(n-1) \frac{(I-H)}{(n-1)} + \sum_{k=1}^{d-1} (-J_k H J_k) \right] \\ &= (n+d-2)L. \end{aligned}$$

La matrice L est le barycentre des matrices définies positives $\frac{1}{(n-1)}(I-H)$ et $(-J_k H J_k)$ affectées des coefficients $(n-1)$ et 1 respectivement. Le lemme B.2 donne donc

$$\det \left[I - H - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H J_k \right] \geq (n+d-2)^n \left[\det \left(\frac{I-H}{n-1} \right) \right]^{\frac{n-1}{n+d-2}} (\det H)^{\frac{d-1}{n+d-2}}$$

d'où le lemme B.3. Remarquons que si $H = \frac{1}{n}I$ l'égalité est atteinte. Dans le cas $d=1$, cette inégalité est triviale. Remarquons que cette inégalité est vraie même si $n=d$. $\square$

Considérons la fonction

$$F_1 : H \longrightarrow \frac{\det(H)}{[\det(I-H)]^\alpha}$$

définie sur l'ensemble des matrices H symétriques dont les valeurs propres sont comprises entre 0 et 1 strictement et de trace égale à 1. Alors

B.4 LEMME. Pour $1 < \alpha \leq (n-1)$ on a, si $n \geq 3$,

$$F_1(H) \leq F_1\left(\frac{1}{n}I\right).$$

Preuve du lemme B.4 : Soient μ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ les valeurs propres de H , elles vérifient

- i) $0 < \mu_i < 1$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$
- ii) $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$.

Posons $F_\alpha(\mu_1, \dots, \mu_n) = \sum_{i=1}^n f_\alpha(\mu_i)$, où $f_\alpha(\mu) = \alpha \log(1-\mu) - \log(\mu)$, et $G(\alpha) = F_\alpha(\mu_1, \dots, \mu_n) - F_\alpha(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$. Si $\mu_1, \dots, \mu_n$ sont, dans un premier temps, considérés comme fixés, on a :

$$\frac{dG}{d\alpha} = \sum_{i=1}^n \log(1-\mu_i) - n \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 0$$

par concavité de la fonction $\log$. Il s'ensuit que, si $G(n-1) \geq 0$, alors $G(\alpha) \geq 0$. Il nous suffit donc de prouver le lemme B.4 dans le cas $\alpha = n-1$, la preuve dans le cas $\alpha \leq n-1$ s'en déduisant automatiquement.

* RECHERCHE DES MINIMA LOCAUX INTÉRIEURS DE F_{n-1} . Par commodité d'écriture, posons $F = F_{n-1}$ et $f = f_{n-1}$. Remarquons que le nombre de solutions de l'équation $f'(\mu) = -k$ situées dans l'intervalle $]0, 1[$ est égal à 0 lorsque $k < n + 2\sqrt{n-1}$ et au plus égal à 2 si $k \geq n + 2\sqrt{n-1}$. Dans ce dernier cas, une seule de ces solutions vérifie $f''(\mu) \geq 0$.

Un minimum local intérieur M vérifiant simultanément les équations :

$$\begin{aligned} f'(\mu_1) &= \dots = f'(\mu_n), \\ f''(\mu_i) + f''(\mu_j) &\geq 0 \text{ pour } i \neq j, \end{aligned}$$

nous en déduisons qu'au moins $(n-1)$ des composantes de M prennent la même valeur (notée x_-) et que l'autre composante prend la valeur $x_+ = 1 - (n-1)x_-$. Par restriction à la droite correspondante, nous en déduisons que x_+ doit être un minimum local de la fonction h définie par :

$$\begin{aligned} h(x) &= (n-1) \log(1-x) - \log(x) \\ &+ (n-1)^2 \log\left[1 - \left(\frac{1-x}{n-1}\right)\right] - (n-1) \log\left(\frac{1-x}{n-1}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(n-1)}{1 - \frac{(1-x)}{(n-1)}} - \frac{1}{x} \\ h''(x) &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{1-x}{n-1}\right)\right]^2} > 0, \end{aligned}$$

donc $x_+ = \frac{1}{n}$ et $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ est l'unique minimum local intérieur de F . Pour conclure il suffit d'étudier la limite de F lorsque $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ tend vers un point $B = (b_1, \dots, b_n)$ du bord de $(]0, 1])^n \cap \{\sum_{i=1}^n \mu_i = 1\}$.

* LIMITES AU BORD. Deux cas se présentent :

1^{er} cas : $b_i = 0$ pour $i \in I$ et $0 < b_j < 1$ pour $j \notin I$. Alors dans ce cas

$$\begin{aligned} \lim_{\mu_i \rightarrow b_i} f(\mu_i) &= +\infty \quad \text{pour } i \in I \\ \lim_{\mu_j \rightarrow b_j} f(\mu_j) &> -\infty \quad \text{pour } j \notin I \text{ car } b_j < 1. \end{aligned}$$

On en déduit que $F(\mu_1, \dots, \mu_n) \rightarrow +\infty$.
 $(\mu_1, \dots, \mu_n) \rightarrow B$

2^e cas : Un des b_i est égal à 1, b_n par exemple. Dans ce cas $b_i = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$. Si le n -uplet $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ tend vers B , il s'écrit sous la forme $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, 1 - (\mu_1 + \dots + \mu_{n-1}))$ avec $\mu_i \rightarrow 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$. On a alors

$$\begin{aligned} F(\mu_1, \dots, \mu_n) &= (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \log(1 - \mu_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \log(\mu_i) \\ &\quad + (n-1) \log(\mu_1 + \dots + \mu_{n-1}) - \log(1 - (\mu_1 + \dots + \mu_{n-1})) \end{aligned}$$

La convexité de la fonction $-\log$ donne

$$\log(n-1) - \log\left(\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i\right) = -\log\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i\right) \leq -\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \log(\mu_i)$$

d'où

$$F(\mu_1, \dots, \mu_n) \geq (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \log(1 - \mu_i) - \log\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i\right) + (n-1) \log(n-1).$$

Lorsque $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ tend vers B , nous en déduisons

$$\liminf F(\mu_1, \dots, \mu_n) \geq (n-1) \log(n-1) > F\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right).$$

En effet, par stricte concavité de la fonction $\log$,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) &= n(n-1) \log\left(\frac{n-1}{n}\right) + n \log(n) \\ &= (n-1) \log(n-1) + (n-1)^2 \left[\frac{1}{(n-1)^2} \log(n-1) + \left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right) \log\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] \\ &< (n-1) \log(n-1) + (n-1)^2 \log(1) = (n-1) \log(n-1). \quad \square \end{aligned}$$

Preuve de la proposition B.1: Il suffit d'appliquer le lemme B.4 au second membre de l'inégalité prouvée dans le lemme B.3. L'exposant α vaut ici

$$\alpha = \frac{2(n-1)}{n-d} \geq 2 > 1$$

la contrainte $\alpha \leq n-1$ est équivalente à

$$n \geq d+2.$$

Rappelons que la dimension n est un multiple de d . Alors :

i) si $d = 1$, on a la contrainte $n \geq 3$.

ii) si $d = 2$, l'espace doit être un espace hyperbolique complexe de dimension complexe au moins 2; par ailleurs, l'espace hyperbolique complexe de dimension complexe 1 est un espace hyperbolique réel de dimension 2, exclu par i).

iii) si $d = 4$ ou $d = 8$, la contrainte devient $n \geq 2d$. Toutefois, l'espace hyperbolique quaternionien (resp. de Cayley) de dimension 1 sur les quaternions (resp. les octaves de Cayley) est un espace hyperbolique réel de dimension 4 (resp. 8) sur $\mathbf{R}$, pour lequel l'inégalité est donc vraie par ailleurs. Notons que dans ce cas l'espace est à courbure constante égale à -4 et donc l'entropie est $2(d-1)$. $\square$

B.5 PROPOSITION. *Il existe une constante $A > 0$ telle que, si $n \geq 3$, alors*

$$\frac{(\det(H))^{1/2}}{\det(I - H - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H J_k)} \leq \left(\frac{n}{h_0^2}\right)^{n/2} \left(1 - A \sum_{i=1}^n \left(\mu_i - \frac{1}{n}\right)^2\right).$$

Preuve de la proposition B.5: La fonction

$$F_2(\mu_1, \dots, \mu_n) = \log(F_1(H)) = \log\left(\prod \frac{\mu_i}{(1 - \mu_i)^\alpha}\right)$$

est strictement concave sur un voisinage $(]0, a_+[)^n$ de $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ et donc sur l'ensemble $(]0, a_+[)^n \cap \{\sum_{i=1}^n \mu_i = 1\}$. On peut donc trouver une constante $B > 0$ telle que

$$F_2(\mu_1, \dots, \mu_n) \leq F_2\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) - B \sum_{i=1}^n \left(\mu_i - \frac{1}{n}\right)^2$$

pour $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in (]0, a_+[)^n \cap \{\sum_{i=1}^n \mu_i = 1\}$.

Maintenant la preuve précédente montre que, sur

$$((]0, 1[^n \setminus (]0, a_+[)^n) \cap \left\{\sum_{i=1}^n \mu_i = 1\right\},$$

la fonction F_2 est strictement inférieure à $F_2(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ et ses limites aux bords également. Donc, quitte à diminuer B , l'inégalité ci-dessus est vraie sur l'ensemble $(]0, 1[^n \cap \{\sum_{i=1}^n \mu_i = 1\}$.

En conséquence, d'après le lemme B.3,

$$\frac{(\det H)^{1/2}}{\det \left(I - H - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H J_k \right)} \leq C_n \exp \left(\frac{(n-d)}{2(n+d-2)} F_2(\mu_1, \dots, \mu_n) \right)$$

où $C_n = \frac{(n-1)^{\frac{n(n-1)}{n+d-2}}}{(n+d-2)^n}$ et où dans F_2 on a $\alpha = \frac{2(n-1)}{n-d}$ pour $n > d$ (comme dans le lemme B.4). Alors

$$\frac{\det(H)^{1/2}}{\det \left(I - H - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H J_k \right)} \leq \left(\frac{n}{h_0^2} \right)^{n/2} \exp \left(-B \sum_{i=1}^n \left(\mu_i - \frac{1}{n} \right)^2 \right).$$

Enfin la convexité de e^{-x} implique l'inégalité

$$e^{-x} \leq 1 - \left(\frac{1 - e^{-T}}{T} \right) x$$

pour tout $x \in [0, T]$ où T est un nombre > 0 . D'où le résultat annoncé car $B \sum_{i=1}^n (\mu_i - \frac{1}{n})^2$ est borné. Ceci traite le cas $n \geq d+2$; comme précédemment les cas $n = d = 1$, $n = 2d = 2$ et $n = d = 2$ sont exclus et $n = d = 4$ et $n = d = 8$ correspondent à des espaces hyperboliques réels à courbure égale à -4 traités par les cas $n = 4$, $d = 1$ et $n = 8$, $d = 1$ respectivement. $\square$

Appendice C

Nous prouvons dans cet appendice la proposition finale du cas d'égalité :

C.1 PROPOSITION. Soient (Y, g) et (X, g_0) deux variétés riemanniennes compactes connexes et orientées de dimension n . On suppose qu'il existe une application lipschitzienne

$$F : Y \longrightarrow X$$

qui est de degré non nul et est contractante, c'est-à-dire vérifie

$$d_0(F(y_1), F(y_2)) \leq d(y_1, y_2)$$

pour tout couple y_1, y_2 de Y , où d_0 (resp. d) est la distance associée à la métrique g_0 (resp. g) sur X (resp. Y). Alors si

$$\text{Vol}(Y, g) = |\deg F| \text{Vol}(X, g_0),$$

l'application F est un revêtement riemannien, c'est-à-dire est localement isométrique.

Preuve : La principale difficulté vient de ce que l'application F n'est pas $\mathcal{C}^1$. En particulier nous ne pouvons pas utiliser le théorème d'inversion locale.

Quitte à changer l'orientation d'une des variétés, nous pouvons supposer que $\deg(F) = p > 0$. L'application F étant lipschitzienne elle est presque partout différentiable ([F], p. 216, théorème 3.1.6); de plus la théorie du degré s'applique, et pour presque tout $x \in X$ ([F], p. 383, corollaire 4.1.26),

$$\deg F(x) = \sum_{y \in F^{-1}\{x\}} \text{signe}(\text{Jac } F(y)) = p.$$

On rappelle que $\text{Jac } F(y)$ désigne le déterminant jacobien de F en $y \in Y$ lorsque F est différentiable en y . En particulier, si $N(x)$ désigne le nombre d'antécédents par F du point $x \in X$, éventuellement infini, on a

$$N(x) \geq p \text{ pour presque tout } x \in X.$$

Nous utilisons ici les mesures canoniques riemanniennes sur Y et X que nous noterons par la suite dv_g et dv_{g_0} .

C.2 LEMME. *Pour presque tout $x \in X$, $N(x) = p$ et pour presque tout $y \in Y$, $D_y F$ est une isométrie positive de $T_y Y$ sur $T_x X$.*

Preuve du lemme C.2 : La formule de la co-aire ([F], p. 243, theorem 3.2.3) s'écrit dans ce cas sous la forme suivante (ici les variétés Y et X ont même dimension) :

$$\int_Y |\text{Jac } F(y)| dv_g(y) = \int_X N(x) dv_{g_0}(x).$$

La remarque ci-dessus montre que

$$\int_X N(x) dv_{g_0}(x) \geq p \text{Vol}(X, g_0).$$

Par ailleurs, l'hypothèse faite sur F , c'est-à-dire qu'elle est contractante, donne

$$\|D_y F(u)\|_{g_0} \leq \|u\|_g$$

si y est un point où F est différentiable et u est un vecteur tangent en y à Y . Ici $\|\cdot\|_{g_0}$ et $\|\cdot\|_g$ désignent les normes déduites des métriques g_0 et g respectivement. Cette inégalité conduit à

$$|\text{Jac } F(y)| \leq 1$$

pour presque tout $y \in Y$. En conséquence

$$\text{Vol}(Y, g) \geq \int_Y |\text{Jac } F|(y) dv_g(y) = \int_X N(x) dv_{g_0}(x) \geq p \text{Vol}(X, g_0).$$

L'hypothèse faite sur les métriques, à savoir $\text{Vol}(Y, g) = p \text{Vol}(X, g_0)$ implique qu'il y a égalité à chaque étape de cette suite d'inégalités et donc que

$$\begin{aligned} N(x) &= p \text{ presque partout sur } X \\ |\operatorname{Jac} F(y)| &= 1 \text{ presque partout sur } Y \end{aligned}$$

La formule utilisée ci-dessus pour le degré de F montre que, puisque $N(x)=p$ presque partout, alors, pour presque tout $y \in Y$, $\operatorname{signe}(\operatorname{Jac} F(y))=+1$. Enfin, la propriété de contraction de F implique que $D_y F$ existe presque partout et est contractante de $(T_y Y, \|\cdot\|_g)$ dans $(T_{F(y)} X, \|\cdot\|_{g_0})$, comme nous l'avons remarqué ci-dessus; cette propriété, combinée avec l'égalité $|\operatorname{Jac} F(y)| = 1$ lorsqu'elle a lieu, montre que, pour presque tout $y \in Y$, $D_y F$ est une isométrie de $T_y Y$ sur $T_{F(y)} X$, qui de plus est positive. $\square$

C.3 Remarque : Si F était de classe C^1 , la continuité de DF impliquerait que celle-ci est une isométrie en tout point et la proposition s'ensuivrait par le théorème d'inversion locale.

Une conséquence du lemme C.2 est que, si A désigne une partie mesurable de X , la formule de la co-aire donne

$$\operatorname{Vol}_g(F^{-1}(A)) = \int_{F^{-1}(A)} |\operatorname{Jac} F(y)| \, dv_g = \int_A N(x) dv_{g_0} = p \operatorname{Vol}_{g_0}(A)$$

où $\operatorname{Vol}_g(\cdot)$ (resp. $\operatorname{Vol}_{g_0}(\cdot)$) désigne la mesure d'une partie de Y (resp. X) calculée à l'aide de la mesure riemannienne dv_g (resp. dv_{g_0}). Nous allons utiliser cette propriété appliquée à des boules riemanniennes. Les métriques g et g_0 étant fixées, il existe trois constantes et un nombre $\varepsilon' > 0$ petit (en particulier inférieur aux rayons d'injectivité de (Y, g) et (X, g_0)) tels que, pour toute boule $B_{g_0}(x, \eta)$ (resp. $B_g(y, \eta)$) de (X, g_0) (resp. de (Y, g)) de rayon $\eta \leq \varepsilon'$, on ait

$$\begin{aligned} v_n \eta^n (1 - C_2 \eta^2) &\leq \operatorname{Vol}_{g_0}(B_{g_0}(x, \eta)) \leq v_n \eta^n (1 + C_1 \eta^2) \\ v_n \eta^n (1 - C_3 \eta^2) &\leq \operatorname{Vol}_g(B_g(y, \eta)) \end{aligned}$$

où v_n désigne le volume de la boule canonique de $\mathbf{R}^n$.

C.4 LEMME. *Pour tout $x \in X$, $N(x) \leq p$.*

Preuve du lemme C.4 : Supposons qu'il existe $x \in X$ possédant au moins $p+1$ antécédents par F que nous noterons $y_1, \dots, y_{p+1}$. Soit $0 < \eta < \varepsilon'$ un nombre assez petit pour que les boules $B_g(y_k, \eta)$ soient deux à deux disjointes. L'application F étant contractante

$$F(B_g(y_k, \eta)) \subset B_{g_0}(x, \eta), \quad k = 1, \dots, p+1.$$

Nous avons donc

$$F^{-1}(B_{g_0}(x, \eta)) \supset \bigcup_{k=1}^{p+1} B_g(y_k, \eta)$$

et

$$\begin{aligned}
 p \operatorname{Vol} (B_{g_0}(x, \eta)) &= \operatorname{Vol} (F^{-1}(B_{g_0}(x, \eta))) \geq \operatorname{Vol}_g \left(\bigcup_{k=1}^{p+1} B_g(y_k, \eta) \right) \\
 &\geq \sum_{k=1}^{p+1} \operatorname{Vol}_g (B_g(y_k, \eta))
 \end{aligned}$$

d'où

$$v_n p \eta^n (1 + C_1 \eta^2) \geq (p+1) v_n \eta^n (1 - C_3 \eta^2)$$

ce qui conduit à une contradiction lorsque η tend vers zéro. $\square$

Si $p = 1$, ceci suffit pour conclure que f est bijective. En effet, le lemme C.4 implique que f est (dans ce cas) injective, la surjectivité découlant de la non-trivialité du degré de f .

Si $p > 1$, alors $N(x)$ est presque partout égal à p mais il pourrait exister des "points de ramification" où $N(x)$ serait strictement plus petit que p .

C.5 LEMME. Soit $y \in Y$ un point où F est différentiable et où $D_y F$ est une isométrie positive, alors, pour toute boule $B_g(y, \eta)$ de rayon assez petit, F restreinte à $B_g(y, \eta)$ est surjective sur un voisinage de $x = F(y)$.

Preuve du lemme C.5 : Choisissons η de sorte que y soit le seul antécédent de x par F dans $B_g(y, \eta)$. L'application F étant contractante $F(B_g(y, \eta)) \subset B_{g_0}(x, \eta)$. Pour simplifier les notations posons $F_B = F|_{B_g(y, \eta)}$. La théorie du degré (voir [F], p. 383, corollaire 4.1.26) montre que, sur les composantes connexes de $B_{g_0}(x, \eta) \setminus F(\partial B_g(y, \eta))$, le degré de F_B est presque partout constant et que de plus, en x , il se calcule par la formule

$$(\deg F_B)(x) = \sum_{z \in B_g(y, \eta) \cap F^{-1}\{x\}} \operatorname{signe}(\operatorname{Jac} F)(z) .$$

Par hypothèse y est le seul antécédent de x par F_B et $\operatorname{signe} \operatorname{Jac} F(y) = +1$. Si U désigne la composante connexe de $B_{g_0}(x, \eta) \setminus F(\partial B_g(y, \eta))$ qui contient x c'est donc un ouvert sur lequel le degré de F_B vaut 1.

En particulier, tout point de U a au moins un antécédent dans $B_g(y, \eta)$. En effet, si x' appartenait à $U \setminus F(B_g(y, \eta))$, l'application F , composée avec la projection sur $\partial B(x, \eta)$ centrée en x' , induirait une application, de même degré (non nul) que $D_y F$, de $\partial B(y, \eta)$ sur $\partial B(x, \eta)$ qui serait prolongeable à $B(y, \eta)$, d'où une contradiction. Ceci prouve le lemme. $\square$

C.6 LEMME. Soit $x \in X$ tel que $N(x) = p$ et $y_1, \dots, y_p$ ses antécédents, alors il existe un voisinage U de x et des voisinages V_i des y_i deux à deux disjoints tels que F soit bijective de V_i sur U pour tout $i = 1, 2, \dots, p$.

Preuve du lemme C.6 : Nous allons utiliser à nouveau le fait que le degré d'une application se localise (voir [F], p. 383, corollaire 4.1.26). Soient

$B_i = B_g(y_i, \eta)$ avec η suffisamment petit pour que ces boules soient deux à deux disjointes. Soient $F_{B_i} = F|_{B_g(y_i, \eta)}$ et U_i la composante connexe de x dans $B_{g_0}(x, \eta) \setminus F(\partial B_g(y_i, \eta))$. Par le lemme C.2 il existe un point z_i arbitrairement proche de y_i où F est différentiable et dont la différentielle est une isométrie positive. On prend z_i assez proche pour que $F(z_i) \in U_i$. Alors, par le lemme C.5, $F(B_i) \cap U_i$ contient un voisinage de $F(z_i)$, en particulier $F(B_i) \cap U_i$ est de mesure non nulle et il existe donc des points de U_i où le degré de F_{B_i} se calcule par l'expression

$$(\deg F_{B_i})(x') = \sum_{z \in B_i \cap F^{-1}\{x'\}} \text{signe}(\text{Jac } F)(z)$$

et tels que $F^{-1}\{x'\} \cap B_i \neq \emptyset$. Le lemme C.2 montre que pour presque tout $y \in Y$ le signe du déterminant jacobien de F en y est $+1$. D'où pour presque tout $x' \in U_i$

$$(\deg F_{B_i})(x') \geq 1.$$

En particulier F_{B_i} est surjective sur U_i , c'est-à-dire, tout point de U_i a au moins un antécédent par F dans la boule fermée $\overline{B}_i$.

Soit $U = \bigcup U_i$, c'est un ouvert contenant x qui est tel que tout point $x' \in U$ a au moins un antécédent dans chaque $\overline{B}_i$ pour $i = 1, \dots, p$. Comme $N(x') \leq p$, chaque point $x' \in U$ a donc exactement un antécédent dans chaque $\overline{B}_i$ (aucun à l'extérieur de $\bigcup_{i=1}^p \overline{B}_i$). $F^{-1}(U)$ est donc un ouvert inclus dans $\bigcup_{i=1}^p \overline{B}_i$, donc dans $\bigcup_{i=1}^p B_i$. Donc si $V_i = F^{-1}(U) \cap B_i$, V_i est un ouvert contenant y_i en bijection par F avec U . $\square$

C.7 LEMME. *Pour chaque $i = 1, 2, \dots, p$, l'application réciproque de $F|_{V_i}$ est une application localement lipschitzienne de U sur V_i .*

Preuve du lemme C.7 : Notons G_i l'application réciproque de $F|_{V_i}$, c'est une bijection de U sur V_i . Nous allons montrer que G_i est localement lipschitzienne dans U de constante de Lipschitz majorée par 2. Remarquons d'abord que, si A est une partie mesurable de V_i et $F(A) \subset U$, la formule de la co-aire donne :

$$\text{Vol}_g(A) = \int_A |\text{Jac } F(y)| dv_g = \int N_A(x) dv_{g_0} = \text{Vol}_{g_0}(F(A))$$

où $N_A(x) = \# \{F^{-1}(x) \cap A\}$. D'après ce qui précède en effet, $N_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F(A) \\ 0 & \text{si } x \notin F(A) \end{cases}$ et $\text{Jac } F(y) = +1$ presque partout. Rappelons que nous avons choisi un nombre ε' tel que les boules de Y et X de rayon inférieur à ε' aient un volume satisfaisant aux inégalités précédentes. On peut également choisir ce nombre de sorte que toutes les boules de rayon plus petit (sur Y ou bien X) soient convexes.

Soit maintenant $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ tel que pour tout $i = 1, 2, \dots, p$, $B_g(y_i, 2\varepsilon) \subset V_i$ et $B_{g_0}(x, 2\varepsilon) \subset U$. On peut alors recommencer la construction précédente pour exhiber des ensembles ouverts $V'_i \subset B_g(y_i, \varepsilon)$ et $U' \subset B_{g_0}(x, \varepsilon)$ tels que F soit une bijection de chaque V'_i sur U' . La principale propriété de V'_i et U' que nous allons utiliser est que pour tout $z \in V'_i$ (resp. $x' \in U'$) et tout $\eta < \varepsilon$, la boule $B_g(z, \eta)$ (resp. $B_{g_0}(x', \eta)$) est incluse dans V_i (resp. U); ces boules sont donc incluses dans une partie où F est bijective.

Afin d'alléger les notations nous supposons que V_i et U vérifient eux-mêmes cette propriété. Nous allons montrer que si z et z' sont deux points de V_i tels que $d_{g_0}(F(z), F(z')) \leq \varepsilon$ alors

$$d_g(z, z') < 2d_{g_0}(F(z), F(z')) .$$

En effet si ce n'est pas vrai, il existe un couple z, z' de points de V_i tels que

$$\eta = d_{g_0}(F(z), F(z')) < \varepsilon \quad \text{et} \quad 2d_{g_0}(F(z), F(z')) \leq d_g(z, z')$$

alors les boules $B_{g_0}(F(z), \eta)$ et $B_{g_0}(F(z'), \eta)$ s'intersectent et leur intersection contient une boule de rayon $\eta/2$ centrée au milieu de la géodésique minimisante joignant $F(z)$ à $F(z')$. Donc

$$\text{Vol}_{g_0}(B_{g_0}(F(z), \eta) \cup B_{g_0}(F(z'), \eta)) \leq v_n \left[2\eta^n(1+C_1\eta^2) - \frac{1}{2^n}\eta^n(1-C_2\eta^2) \right] .$$

Par ailleurs les boules $B_g(z, \eta)$ et $B_g(z', \eta)$ sont disjointes car $d_g(z, z') \geq 2\eta$. Donc, d'après ce qui précède (ici les précautions prises sur le choix de U et V_i sont importantes),

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{g_0}(F(B_g(z, \eta) \cup B_g(z', \eta))) &= \text{Vol}_g(B_g(z, \eta) \cup B_g(z', \eta)) \\ &\geq v_n [2\eta^n(1 - C_3\eta^2)] . \end{aligned}$$

Enfin, comme F contracte les distances

$$F(B_g(z, \eta)) \subset B_{g_0}(F(z), \eta) \quad \text{et} \quad F(B_g(z', \eta)) \subset B_{g_0}(F(z'), \eta) .$$

D'où l'inégalité

$$v_n \eta^n \left[2(1 + C_1\eta^2) - \frac{1}{2^n}(1 - C_2\eta^2) \right] \geq v_n \eta^n [2(1 - C_3\eta^2)]$$

qui donne

$$\left[2(C_1 + C_3) + \frac{1}{2^n}C_2 \right] \eta^2 \geq \frac{1}{2^n}$$

ce qui est impossible si ε (donc η) est assez petit (rappelons que C_1, C_2 et C_3 sont fixées).

Ceci prouve le lemme. □

C.8 LEMME. Pour chaque $i = 1, 2, \dots, p$, l'application $F|_{V_i}$ est une isométrie locale bijective de V_i sur U .

Preuve du lemme C.8 : L'application G_i , réciproque de $F|_{V_i}$, étant lipschitzienne, elle est différentiable presque partout, et sa différentielle est presque partout l'inverse de celle de F c'est-à-dire est une isométrie positive. Si γ est une courbe dans U en position générale (i.e. γ intersecte l'ensemble de mesure pleine où G_i est différentiable et de différentielle une isométrie positive en un ensemble de mesure pleine le long de γ) qui est rectifiable, alors $G_i \circ \gamma$ est une courbe dans V_i qui est également rectifiable et de même longueur.

Soient alors x' et x'' deux points de U tels que la géodésique minimisante γ les joignant soit incluse dans U et en position générale alors

$$\begin{aligned} d_g(G_i(x'), G_i(x'')) &\leq \text{longueur}(G_i \circ \gamma) \\ &\leq d_{g_0}(x', x'') \end{aligned}$$

par ailleurs l'application F étant contractante on a donc

$$d_g(G_i(x'), G_i(x'')) = d_{g_0}(x', x'') .$$

Ce qui prouve que F et G_i sont des isométries locales bijectives. $\square$

Un corollaire immédiat des lemmes C.6, C.7 et C.8 est que l'ensemble où $N(x) = p$ est un ouvert de X . Soit alors $K = \{x \in X \mid N(x) < p\}$ c'est un fermé de X ; c'est l'ensemble des points de "ramification" de F . Le but de ce qui suit est de montrer que K est vide. Nous savons déjà (lemme C.2) que K est de mesure nulle.

C.9 LEMME. *L'ensemble K est vide.*

Preuve du lemme C.9 : Soit γ une géodésique, minimisante sur toute sa longueur, dans X dont les extrémités sont dans $X \setminus K$ et qui est en position générale par rapport à K , c'est-à-dire : l'ensemble $\gamma([0, \ell]) \cap K$ est un fermé de mesure nulle dans $\gamma([0, \ell])$, où l'on a supposé de plus γ paramétrée par l'intervalle $[0, \ell]$. Soit $x \in \gamma([0, \ell]) \cap K$ tel que $N(x) = q < p$ et tel que

$$q = \sup \{N(x) \mid x \in \gamma([0, \ell]) \cap K\} .$$

i) Nous noterons $y_1, \dots, y_q$ les antécédents de x par F . Si η est tel que les boules $B_g(y_i, \eta) = B_i$ sont deux à deux disjointes, alors les arguments du lemme C.6 montrent qu'il existe un voisinage U de x dans X tel que pour presque tout $x' \in U$

$$(\deg F_{B_i})(x') \geq 1$$

et que, donc, F_{B_i} est surjective sur U (on rappelle que F_{B_i} désigne la restriction de F à B_i). En particulier tout $x' \in \gamma([0, \ell]) \cap K$ assez proche de x a au moins un antécédent dans chaque B_i . Pour un tel x' on a donc $N(x') \geq q$ et par définition de q , $N(x') \leq q$, d'où $N(x') = q$. Tout $x' \in \gamma([0, \ell]) \cap K$

assez proche de x a donc exactement un antécédent dans chaque boule B_i , $i = 1, 2, \dots, q$.

ii) Le degré étant additif on a

$$\sum_{i=1}^q (\deg F_{B_i}) \equiv p$$

presque partout sur U . Il existe donc un indice $1 \leq i_0 \leq q$ tel que $\deg F_{B_{i_0}} \geq 2$ presque partout sur U . En particulier, tout point "régulier" dans U , c'est-à-dire dans le complémentaire de K a au moins deux antécédents dans B_{i_0} et F est une isométrie locale au voisinage de ceux-ci.

Supposons que x est un point d'accumulation de $\gamma([0, \ell]) \cap K$ (c'est-à-dire qu'il existe une suite de points de $\gamma([0, \ell]) \cap K$ distincts de x s'accumulant en x). Comme le complémentaire de K dans $\gamma([0, \ell])$ est un ouvert de $\gamma([0, \ell])$ de mesure pleine, x est aussi point d'accumulation de segments ouverts de $\gamma([0, \ell]) \setminus K$. C'est-à-dire, il existe un intervalle $\gamma([a, b])$ que l'on peut choisir de longueur arbitrairement petite et arbitrairement proche de x , tel que $\gamma(a)$ et $\gamma(b) \in K$ et $\gamma([a, b]) \subset \gamma([0, \ell]) \setminus K$. L'intervalle géodésique $\gamma([a, b])$ se relève donc, en un nombre égal à $\deg F_{B_{i_0}} \geq 2$ de segments géodésiques de même longueur, dans B_{i_0} , joignant l'unique antécédent de $\gamma(a)$ dans B_{i_0} à l'unique antécédent de $\gamma(b)$. Le paramétrage de chacun des segments géodésiques relevés étant imposé par le fait que F est une isométrie locale (lemme C.8), les segments géodésiques sont distincts, ce qui contredit l'unicité locale des géodésiques.

iii) Le point x est donc isolé dans $\gamma([0, \ell]) \cap K$. Quitte à raccourcir la géodésique on peut donc supposer que $\gamma(t_0) = x$ et $\gamma([0, t_0])$ ainsi que $\gamma([t_0, \ell])$ ne rencontrent pas K . On suppose aussi que la géodésique est suffisamment courte pour être totalement incluse dans U . Soient $z_1, \dots, z_r$ (resp. $z'_1, \dots, z'_r$), où $r = \deg F_{B_{i_0}} \geq 2$, les antécédents de $\gamma(0)$ (resp. $\gamma(\ell)$) dans B_{i_0} . En relevant dans B_{i_0} , comme précédemment, les intervalles géodésiques $\gamma([0, t_0])$ et $\gamma([t_0, \ell])$ en r intervalles géodésiques distincts dans B_{i_0} , on réalise une géodésique brisée de z_k à $z'_{k'}$ et passant par y_{i_0} pour tout k et k' . En particulier les relevés de $\gamma([0, t_0])$ (resp. $\gamma([t_0, \ell])$) ayant même longueur que $\gamma([0, t_0])$ (resp. $\gamma([t_0, \ell])$), la longueur de ces géodésiques brisées est ℓ . D'où

$$d_g(z_k, z'_{k'}) \leq \ell = d_{g_0}(F(z_k), F(z'_{k'}))$$

pour tout $k, k' = 1, 2, \dots, r$. La propriété de contraction de F implique alors que

$$d_{g_0}(F(z_k), F(z'_{k'})) = d_g(z_k, z'_{k'}) .$$

Les géodésiques brisées joignant z_k et $z'_{k'}$ réalisent donc la distance dans

(Y, g) de z_k à z'_k , et donc ne peuvent être brisées, ce qui est en contradiction avec le fait que $r \geq 2$.

En conclusion aucune géodésique en position générale ne peut rencontrer K . Si $x \in K$ toute g -géodésique passant par x doit rencontrer K en un ensemble de mesure non nulle ce qui, par l'argument du chapitre 7 (preuve du lemme 7.8), contredit le fait que K est de mesure nulle. Ceci prouve le lemme. $\square$

La proposition est donc démontrée car pour tout $x \in X$, $N(x) = p$ et F est une isométrie locale; les variétés étant compactes F est un revêtement riemannien.

Appendice D

La preuve de la proposition suivante nous a été suggérée par Jean Lannes que nous remercions.

D.1 PROPOSITION. Soient (X, g_0) et (Y, g) deux variétés riemanniennes compactes connexes et orientées de dimension $n \geq 3$. On suppose que les fibrés unitaires tangents $U_{g_0}X$ et U_gY sont homéomorphes et que X est un $K(\pi, 1)$. Alors, Y est un $K(\pi, 1)$.

D.2 Remarque : La proposition ne dépend pas des métriques g_0 et g choisies, en conséquence il n'en sera plus fait mention dans la suite.

Preuve : Si $\tilde{Y}$ et $\tilde{X}$ désignent les revêtements universels respectifs de Y et X alors $U\tilde{Y}$ et $U\tilde{X}$ sont les revêtements universels de UY et UX ; en effet, la suite exacte d'homotopie ([Sp], p. 377) des fibrations $S^{n-1} \hookrightarrow U\tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$ et $S^{n-1} \hookrightarrow U\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ montre que, en dimension $n \geq 3$, $U\tilde{Y}$ et $U\tilde{X}$ sont simplement connexes. En conséquence, $U\tilde{Y}$ et $U\tilde{X}$ sont homéomorphes.

Soit $F \simeq S^{n-1}$ (F homéomorphe à S^{n-1}) une fibre de $U\tilde{Y}$ et $i : F \hookrightarrow U\tilde{Y}$ l'injection de F dans $U\tilde{Y}$.

D.3 LEMME. L'injection $i : F \hookrightarrow U\tilde{Y}$ est une équivalence d'homotopie.

Admettons ce lemme et prouvons la proposition D.1 La suite exacte d'homotopie de la fibration $S^{n-1} \hookrightarrow U\tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$ ([Sp], p. 377) s'écrit

$$\cdots \pi_k(S^{n-1}) \rightarrow \pi_k(U\tilde{Y}) \rightarrow \pi_k(\tilde{Y}) \rightarrow \pi_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_{k-1}(U\tilde{Y}) .$$

Le lemme D.3 montre que les flèches $\pi_k(S^{n-1}) \rightarrow \pi_k(U\tilde{Y})$ et $\pi_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_{k-1}(U\tilde{Y})$ sont des isomorphismes pour $k \geq 1$; l'application $\pi_k(\tilde{Y}) \rightarrow \pi_{k-1}(S^{n-1})$ est donc une injection d'image nulle, d'où $\pi_k(\tilde{Y}) = 0$ pour tout $k \geq 1$, ce qui signifie que Y est un $K(\pi, 1)$.

Preuve du lemme D.3 : Comme $U\tilde{Y}$ est homéomorphe à $U\tilde{X} \simeq \tilde{X} \times S^{n-1}$, $U\tilde{Y}$ a le type d'homotopie de S^{n-1} et par conséquent l'injection $i : S^{n-1} \simeq F \hookrightarrow U\tilde{Y}$ est une équivalence d'homotopie si et seulement si, $i^* : H^{n-1}(U\tilde{Y}) \rightarrow H^{n-1}(S^{n-1})$ est un isomorphisme (voir [Hop] et [Sp], p. 398).

Considérons les suites exactes de Thom-Gysin des fibrés en sphères $U\tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$ et $F \rightarrow \{y_0\}$ respectifs, où y_0 est le point base de F ([Sp], p. 260). Les injections naturelles $F \hookrightarrow U\tilde{Y}$ et $\{y_0\} \hookrightarrow \tilde{Y}$ induisent entre ces deux suites des morphismes. On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^k(\tilde{Y}) & \longrightarrow & H^k(U\tilde{Y}) & \longrightarrow & H^{k-n+1}(\tilde{Y}) & \longrightarrow & H^{k+1}(\tilde{Y}) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H^k(\{y_0\}) & \longrightarrow & H^k(F) & \longrightarrow & H^{k-n+1}(\{y_0\}) & \longrightarrow & H^{k+1}(\{y_0\}) & \longrightarrow. \end{array}$$

En particulier, pour $k = n - 1$, nous obtenons

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-1}(U\tilde{Y}) & \xrightarrow{a} & H^0(\tilde{Y}) & \longrightarrow & H^n(\tilde{Y}) \\ \downarrow i^* & & \downarrow b & & \\ H^{n-1}(F) & \xrightarrow{c} & H^0(\{y_0\}) & \longrightarrow & H^n(\{y_0\}) = 0. \end{array}$$

Comme $U\tilde{Y}$ est homéomorphe à $U\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ est non compact donc $H^n(\tilde{Y}) = 0$ et, par ailleurs, $H^{n-1}(U\tilde{Y})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$ ainsi que $H^0(\tilde{Y})$ ($\tilde{Y}$ est connexe). Le morphisme a de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$ est surjectif, c'est donc un isomorphisme; il en est de même de c . Enfin, b est un isomorphisme également et donc i^* aussi. $\square$

Références

- [B] Y. BABENKO, Closed geodesics, asymptotic volume, and characteristics of group growth, *Math. USSR Izvestya* 33 (1989), 1–37.
- [BaGrS] W. BALLMANN, M. GROMOV, V. SCHROEDER, *Manifolds of Nonpositive Curvature*, Birkhäuser Boston Inc. 1985.
- [BePe] R. BENEDETTI, C. PETRONIO, *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Universitext, Springer Verlag 1993.
- [BenFoL] Y. BENOIST, P. FOULON, F. LABOURIE, Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables, *J. Amer. Math. Soc.* 5:1 (1992), 33–74.
- [Ber] M. BERGER, Du côté de chez Pu, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 5 (1972), 1–44.
- [BerGaMaz] M. BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET, Le spectre d'une variété riemannienne, *Springer Lecture Notes in Mathematics* 194, (1971).
- [Bes1] A.L. BESSE, *Manifolds All of Whose Geodesics are Closed*, *Ergebnisse der Math.*, Springer-Verlag, 1978.

- [Bes2] A.L. BESSE, *Einstein Manifolds*, *Ergebnisse der Math.*, Springer-Verlag, 1987.
- [BoW] M. BOILEAU, S. WANG, *Non-zero degree maps and surface bundles over S^1* , preprint, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1995.
- [BsCoG1] G. BESSON, G. COURTOIS, S. GALLOT, *Le volume et l'entropie minimal des espaces localement symétriques*, *Invent. Math.* 103 (1991), 417–445.
- [BsCoG2] G. BESSON, G. COURTOIS, S. GALLOT, *Les variétés hyperboliques sont des minima locaux de l'entropie topologique*, *Invent. Math.* 117 (1994), 403–445.
- [BsCoG3] G. BESSON, G. COURTOIS, S. GALLOT, *Sur le volume des simplexes hyperboliques idéaux*, en préparation.
- [BuK] K. BURNS, A. KATOK, *Manifolds with non-positive curvature*, *Ergod. Th. of Dynam. Sys.* 5 (1985), 307–317.
- [C] K. CORLETTE, *Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry*, *Ann. of Math.* 135 (1992), 165–182.
- [CrKl] C. CROKE, B. KLEINER, *Conjugacy and rigidity for manifolds with a parallel vector field*, preprint, février 1992.
- [Cr] C. CROKE, *Rigidity for surfaces of non-positive curvature*, *Comm. Math. Helv.* 65:1 (1990), 150–169.
- [CdV] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques*, *Compositio Math.* 27 (1973), 159–184.
- [DRi] E. DAMEK, F. RICCI, *A class of non-symmetric harmonic riemannian spaces*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 27 (1992), 139–142.
- [DoE] E. DOUADY, C. EARLE, *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, *Acta. Math.* 157 (1986), 23–48.
- [F] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, *Grundlehren Band*, Springer Verlag, 153 (1969).
- [Fo] P. FOULON, *Nouveaux invariants géométriques des systèmes dynamiques du second ordre : application à l'étude du comportement ergodique*, Thèse d'état, École Polytechnique, Centre de Mathématiques (1986).
- [FoL] P. FOULON, F. LABOURIE, *Sur les variétés compactes asymptotiquement harmoniques*, *Invent. Math.* 109 (1992), 97–111.
- [Fu] H. FURSTENBERG, *A Poisson formula for semi-simple Lie groups*, *Annals of Math.* 77 (1963), 335–386.
- [GHuLa] S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer-Verlag (1987).
- [Gr1] M. GROMOV, *Volume and bounded cohomology*, *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.* 56 (1981), 213–307.
- [Gr2] M. GROMOV, *Filling riemannian manifolds*, *J. Differ. Geom.* 18 (1983), 1–147.
- [GrT] M. GROMOV, W. THURSTON, *Pinching constants for hyperbolic manifolds*, *Invent. Math.* 89 (1987), 1–12.
- [H1] U. HAMENSTÄDT, *Time-preserving conjugacies of geodesic flows*, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 12 (1992), 67–74.
- [H2] U. HAMENSTÄDT, *Anosov flows which are uniformly expanding at periodic points*, à paraître.
- [HoR] D. HONG, S. RAJEEV, *Universal Teichmüller space and $\text{Diff}(S^1)/S^1$* , *Comm. Math. Phys.* 135 (1991), 401–411.
- [Hop] H. HOPF, *Abbildungsklassen n -dimensionaler mannigfaltigkeiten*, *Math. Annalen* 96 (1926), 209–224.
- [K] A. KATOK, *Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics*, *Ergodic Theory Dyn. Sys.* 8 (1988), 139–152.

- [KKnWe] A. KATOK, G. KNEPER, H. WEISS, Regularity of topological entropy, à paraître.
- [Ki] A. KIRILLOV, Kähler structures on K -orbits of the group of diffeomorphisms of a circle, *Funkts. Anal. Prilozhen* 21:2 (1987), 42–45.
- [KiY] A. KIRILLOV, D. YURIEV, Kähler of the infinite dimensional homogenous manifold $\text{Diff}_+(S^1)/\text{Rot}(S^1)$, *Funct. Anal. Appl.* 20 (1986), 322–324, *ibid* 21 (1987), 284–294.
- [Le] C. LEBRUN, Einstein metrics and Mostow rigidity, Preprint SUNY at Stony Brook (novembre 1994)
- [Led1] F. LEDRAPPIER, Harmonic measures and Bowen-Margulis measures, *Israel J. Math.* 71 (1990), 275–287.
- [Led2] F. LEDRAPPIER, Applications of dynamics to compact manifolds of negative curvature, *Conférence Congrès International de Zürich* (1994),
- [Li] A. LICHNEROWICZ, Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques, *Bull. Soc. Math. France* 72 (1944), 146–169.
- [M] A. MANNING, Topological entropy for geodesic flows, *Ann. Math.* 110 (1979), 567–573.
- [Ma] G.A. MARGULIS, Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature, *Funct. Anal. Appl.* 3 (1969), 335–336.
- [Mo] F. MORGAN, Calibrations and new singularities in area minimizing surfaces: a survey, *Proc. Conf. Problèmes Variationnels, Paris* (1988).
- [Mos] G.D. MOSTOW, Quasiconformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms, *Publications de l'IHES* 34 (1968), 53–104.
- [N] S. NAG, On the tangent space to the universal Teichmüller space, *Ann. Acad. Scient. Fennicae, Seires A.I, Math.* 18 (1993), 377–393.
- [O] J.P. OTAL, Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative, *Ann. Math.* 131 (1990), 151–162.
- [P] O. PEKONEN, Universal Teichmüller space in geometry and physics, preprint (1993).
- [Sc] L. SCHWARTZ, Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures, Tata Institute of Fundamental Research, Oxford University Press (1973),
- [Se] B. SEVENNEC, *Conversations scientifiques*.
- [Si] Y.T. SIU, The complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, *Ann. of Math.* 112 (1980), 73–111.
- [Sp] E.H. SPANIER, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill (1966).
- [Sz] Z. SZABO, The Lichnerowicz conjecture on harmonic manifolds, *J. Differential Geom.* 31 (1990), 1–28.
- [T] W. THURSTON, The geometry and topology of three-manifolds, Princeton University (1979).
- [Wi] E. WITTEN, Coadjoint orbits and the Virasoro group, *Comm. Math. Phys.* 114 (1988), 1–53.
- [Z] R.J. ZIMMER, *Ergodic Theory and Semisimple Groups*, Monographs in Mathematics 81, Birkhäuser (1984).

Gérard Besson
 Institut Fourier
 C.N.R.S.–U.R.A. 188
 B.P. 74
 38402 Saint Martin d'Hères
 France

Gilles Courtois
 École Polytechnique
 C.N.R.S.–U.R.A. 169
 Centre de Math.
 91128 Palaiseau
 France

Sylvestre Gallot
 École Normale Supér.
 C.N.R.S.–U.M.R. 128
 46, Allée d'Italie
 69364 LYON 07
 France

Submitted: July 1994